

## HISTORICKÝ PREHĽAD KRESLIACICH ZARIADENÍ A ICH SIMULÁCIE V PROSTREDÍ CABRI GEOMETRIE

Lilla Kremžárová

Katedra matematiky, Materiálovotechnologická fakulta, Slovenská technická univerzita  
Paulínska 16, 917 24 Trnava, SR  
e-mail: [lilla.kremzarova@stuba.sk](mailto:lilla.kremzarova@stuba.sk)

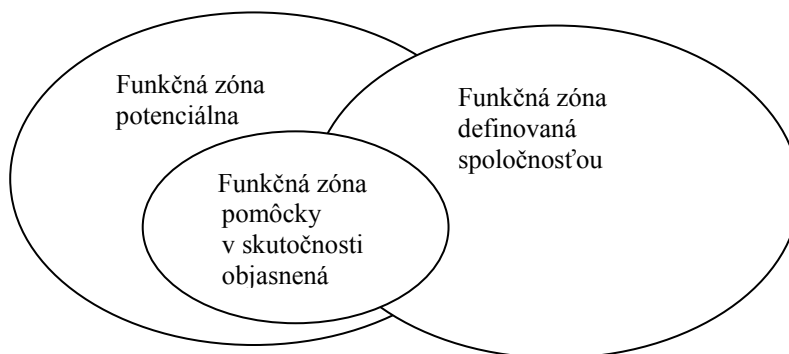
**Abstract.** In this article we propose the description of different artefacts once used for constructions (also non-euclidian) of problems (sometimes euclidly unsolvable) and we show the possibilities of simulations of these machines in Cabri.

**Key words:** artefacts, pantographe, simulation, software Cabri

### 1. Úvod

Mechanické zariadenia (artefakty) majú dvojaké použitie vo vzdelávacom procese. Na jednej strane, slúžia študentom ako pomôcka, teda ich použitie vplýva na pojmotvorný proces. Na druhej strane slúžia učiteľom ako didaktické premenné pri overovaní pedagogických situácií.

Spoločnosť definuje množinu funkcií artefaktu, ktorú označujeme ako funkčná zóna definovaná spoločnosťou. Zahŕňa konštrukciu artefaktu ako aj jeho skutočné využitie. Druhá zóna, ktorá iba čiastočne pokrýva prvú, označovaná ako funkčná potenciálna zóna artefaktu, predstavuje množinu funkčných potenciálnych hodnôt artefaktu v danom okamihu pre daného používateľa. Napokon, tretia funkčná zóna zodpovedá pomôcke v skutočnosti vytvorenej učiteľom alebo žiakmi (*obr. 1*).



*Obr. 1* Rôzne funkčné zóny hodnôt artefaktu

Predchádzajúci diagram má z hľadiska didaktiky veľký význam, nakoľko z toho istého artefaktu môžu byť zostavené žiakmi alebo učiteľmi rôzne pomôcky. Pomôcky, ktorých výsledný efekt na vyučovací proces môže byť veľmi rozdielny, či už v tom najhoršom alebo najlepšom zmysle slova.

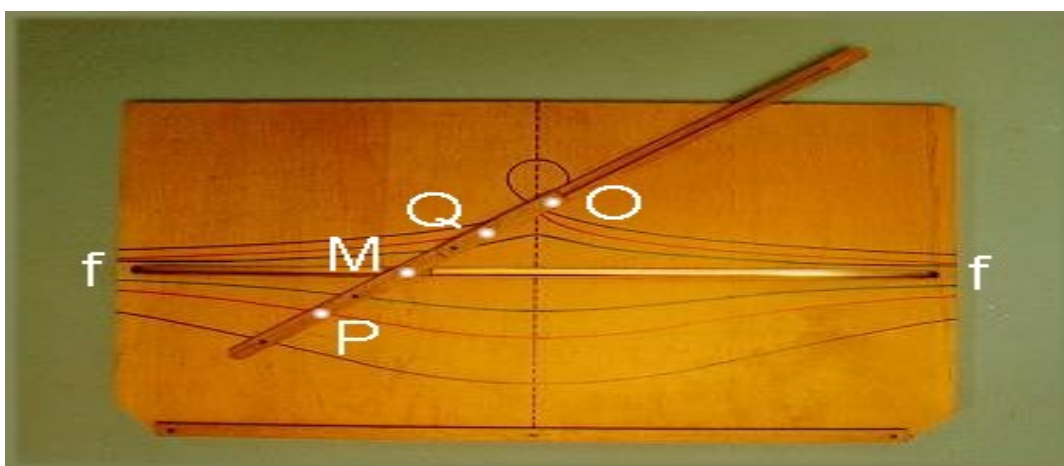
V procese tvorby pomôcky sa teda didaktické použitie artefaktov nezúži iba na výber daného artefaktu spomedzi viacerých. Predpokladá sa, že učiteľ zasahuje do tvorby pomôcok a to v takom zmysle, že definuje funkčnú zónu, ktorú chce mať žiakmi efektívne vytvorenú, berúc do úvahy ich schopnosti, skonštruované alebo skonštruovateľné schémy ako aj stanovené didaktické ciele. Z toho vyplýva, že učiteľ riadi skutočnú tvorbu pomôcok.

Výhody didaktického použitia artefaktov:

- vzbudzujú záujem,
- posilňujú intuíciu a predstavivosť,
- prehľbujú vzájomný vzťah medzi matematickými modelmi a realitou,
- podporujú hľadanie dôkazov,
- vedú k novým a neobyčajným záverom, týkajúcich sa pohybu,
- vedú používateľov k ponoreniu sa do historickej dimenzie spontánnou a prirodzenou cestou a k zamysleniu sa nad vzájomnými vzťahmi medzi matematikou, spoločnosťou a kultúrou.

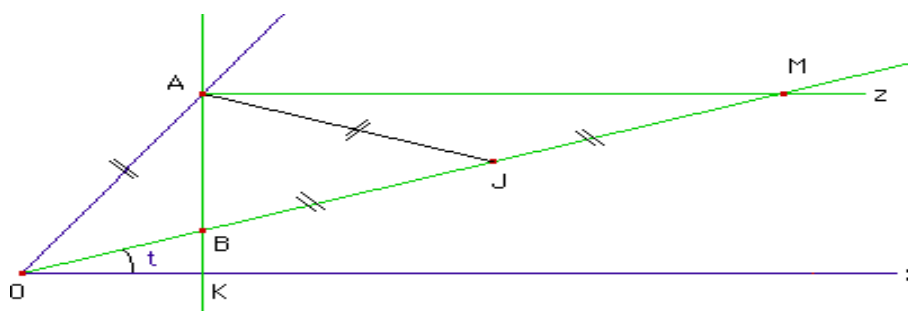
## 2. Nicomedova konchoida

Nicomedes (asi 200 rokov pred n. l.), podnietený Hippiasom d'Elis, mechanicky skonštruoval, po neúspešných pokusoch pomocou pravítka a kružidla, „kružidlo“ slúžiace na riešenie „trisekcie uhla“ (obr. 2).



Obr. 2

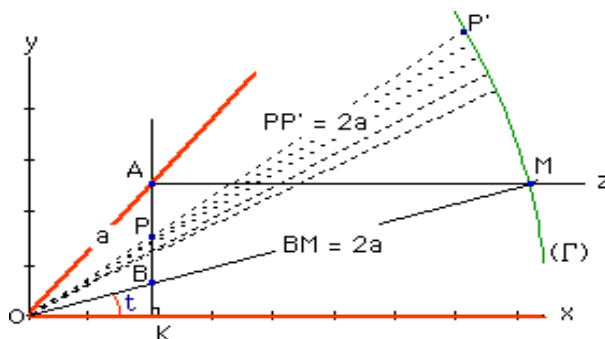
Nicomedes navrhol približné riešenie trisekcie uhla využitím *trisektrix*: chceme vyriešiť trisekciu uhla  $\angle xOA$ . Bod  $K$  je pravouhlý priemet bodu  $A$  na priamku  $x$  a priamka  $z$  prechádza bodom  $A$  rovnobežne s priamkou  $x$ . Zostrojme bod  $B$ ,  $B \in \overline{AK}$  tak, že priamky  $\overrightarrow{OB}$  a  $z$  sa pretnú v bode  $M$  a pre bod  $M$  platí, že  $|BM| = 2|OA|$  (obr. 3).



Obr. 3

Potom z vlastnosti ťažnice na stranu  $a$  v trojuholníku  $BAM$  vyplýva, že  $|\angle AOB| = 2|\angle BOK|$ . Uhol  $|\angle xOM| = \frac{1}{3}|\angle xOA|$ :  $\triangle BAM$  s pravým uhlom vo vrchole  $A$ ;  $|JA|$

$=|JM| = |OA|$ ; uhly  $\angle BOK$  a  $\angle JMA$  sú striedavé, teda zhodné. Označme si uhol  $\angle BOK$  ako uhol  $\angle t$ . Keďže  $\triangle OAJ$  je rovnoramenný, veľkosť uhla  $|\angle AOB| = |\angle OJA| = 2|\angle t|$ , t. j. veľkosť uhla  $|\angle xOA| = 3|\angle t|$ .



Obr. 4

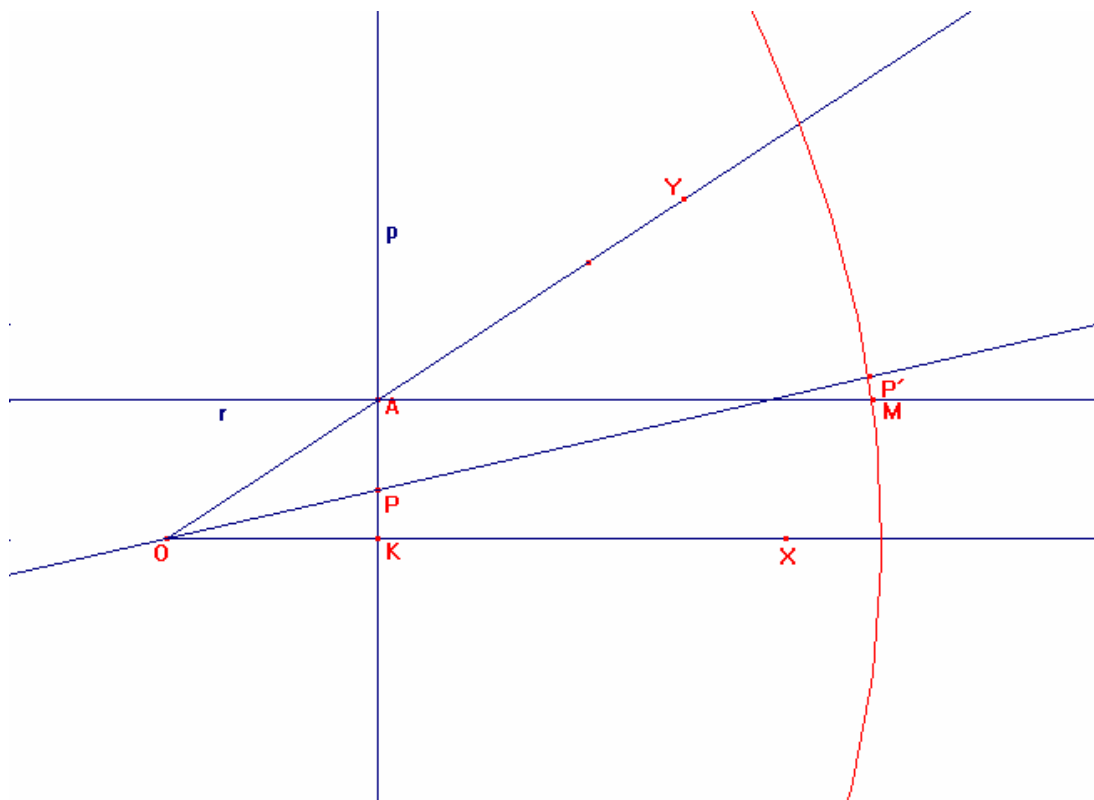
Konštrukcia bodu  $M$  (obr. 4): Nech je daná ortonormálna báza  $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$ ;  $a = |OA|$ .

- Každému bodu  $P$ ,  $P \in \overline{AK}$ , priradíme bod  $P'$  patriaci polpriamke  $\overline{OP}$  tak, že  $|OP'| = |OP| + 2a$  (teda  $|PP'| = 2a$ ).
- Body  $P'$  popisujú krivku  $\Gamma$ , krivku ktorá sa nazýva trisektrix.

Priamka  $z$  prechádzajúca bodom  $A$  rovnobežne s priamkou  $x$  pretína krivku  $\Gamma$  v bode  $M$ .

## 2.1. Nicomedova konchoida – simulácia v prostredí Cabri geometrie

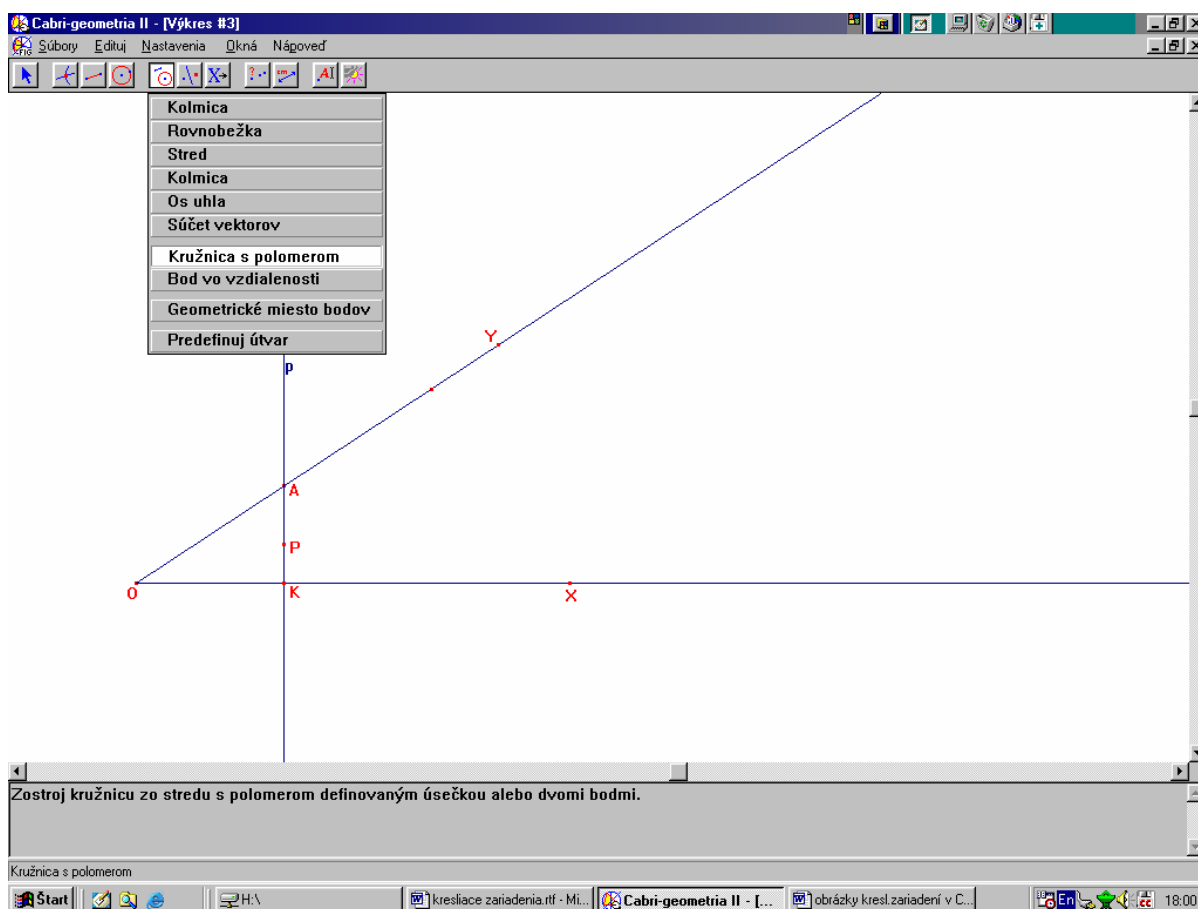
Nicomedova konchoida (simulácia v Cabri) (obr. 5):



Obr. 5

Postup pri zostrojení simulácie prístroja na zostrojenie Nicomedovej konchoidy :

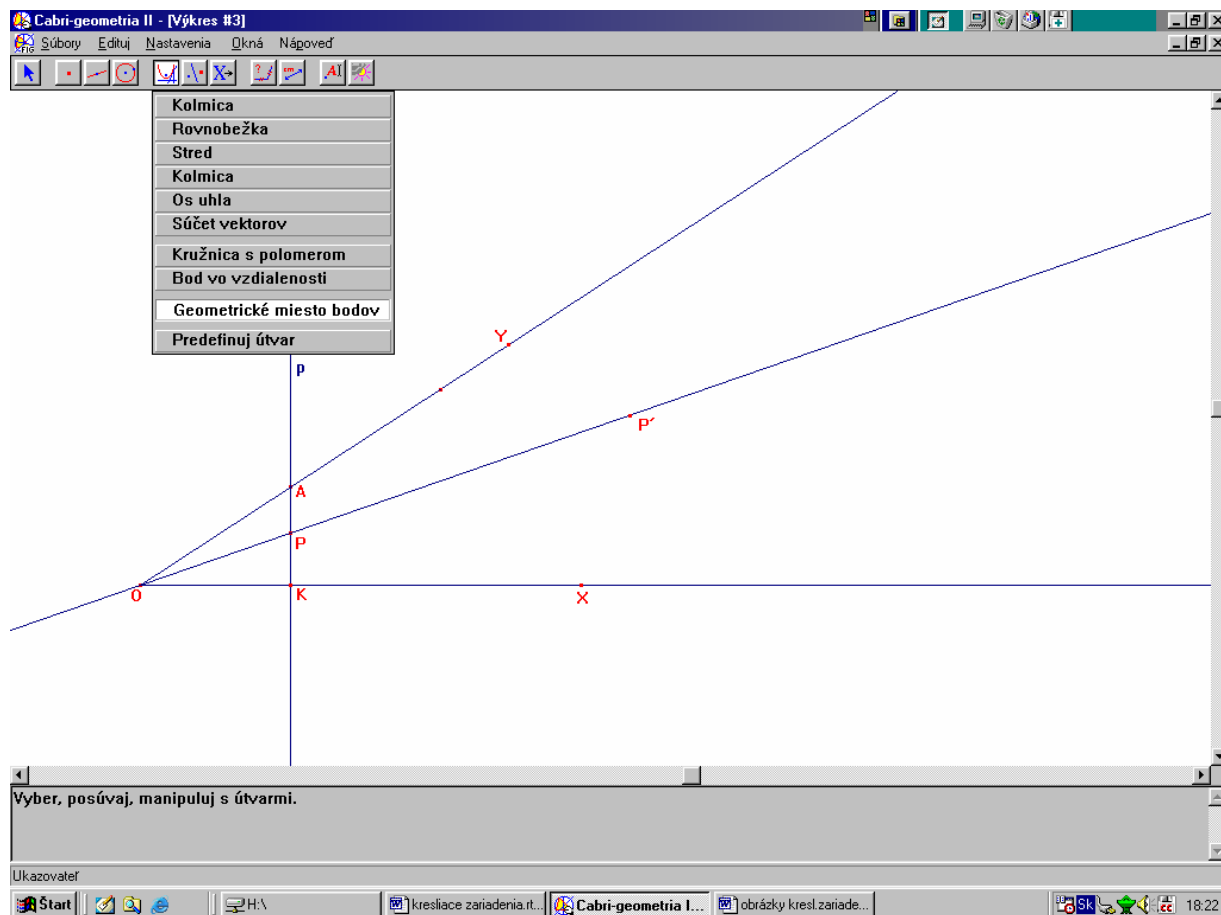
1. Zostrojíme bod  $O$ , polpriamku  $\overrightarrow{OX}$  a polpriamku  $\overrightarrow{OY}$  (Body  $O$ ,  $X$ ,  $Y$  nie sú kolineárne).
2.  $A$ ;  $A \in \overrightarrow{OY}$
3.  $p$ ;  $p \perp \overrightarrow{OX} \wedge A \in p$
4.  $K$ ;  $K \in p \cap \overrightarrow{OX}$
5.  $P$ ;  $P \in \overrightarrow{AK}$
6.  $k$ ;  $k(P; r = 2|OA|)$  (obr. 6)
7.  $P'$ ;  $P' \in k \cap \overrightarrow{OP}$



Obr. 6

8. Kružnicu  $k$  skryjeme.
9.  $\Gamma$ ;  $\Gamma = \{P'; P \in \overrightarrow{AK}\}$ , krivku  $\Gamma$  nazývame trisektrix (obr. 7).
10.  $r$ ;  $r \parallel \overrightarrow{OX} \wedge A \in r$
11.  $M$ ;  $M \in \Gamma \cap r$  (pozri obr. 5)
12.  $|\angle KOM| = \frac{1}{3}|\angle XOY|$

Poznámka: Pravdivosť poslednej rovnosti v Cabri geometrii možno overiť napríklad použitím osových súmerností  $\varphi(\overrightarrow{OM}): \overrightarrow{OX} \rightarrow \overrightarrow{OX'}$ , potom  $\varphi(\overrightarrow{OX'}): \overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{OY}$ .



Obr. 7

Polárna rovnica takto získanej krivky trisektrix :

$$r = |OP| + |PP'| = \frac{|OK|}{\cos t} + 2a \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Je to rovnica konchoidy priamky  $\overrightarrow{AK}$ .

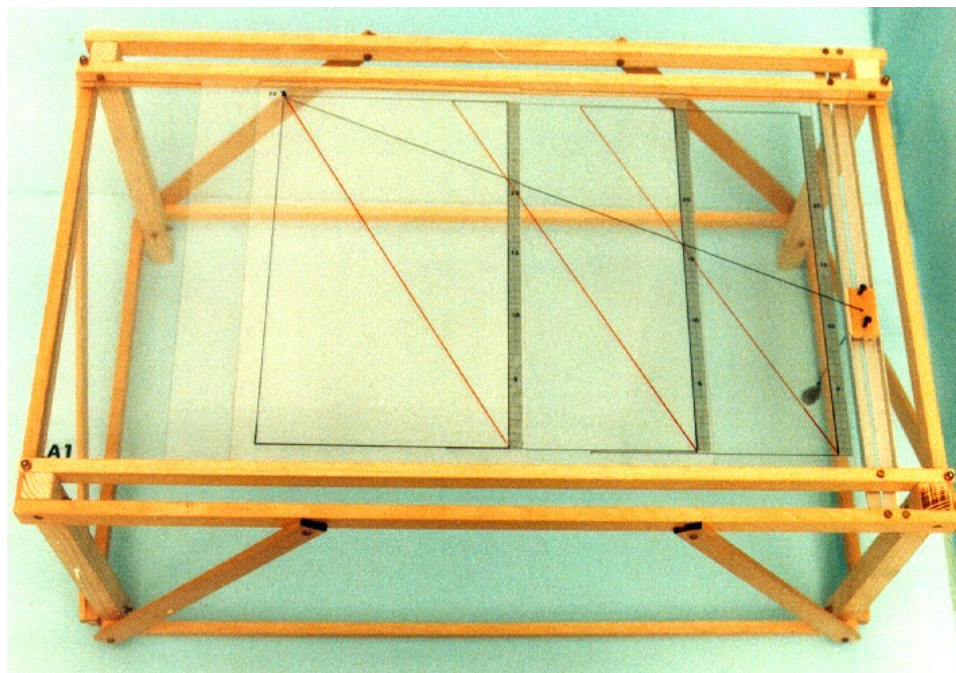
V roku 1801 Gauss a v roku 1837 Wantzel dokázali neriešiteľnosť tejto úlohy pomocou pravítka a kružítka.

### 3. Mesolabon

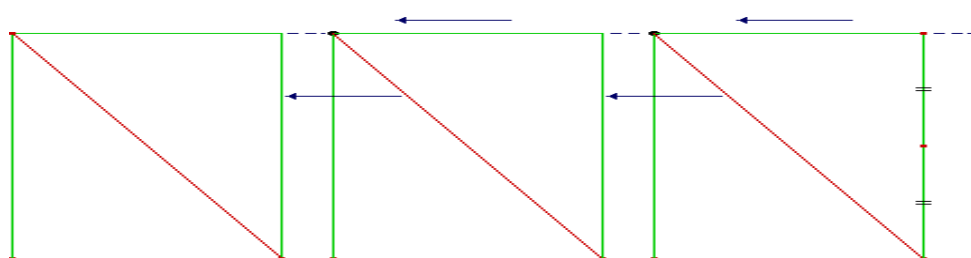
Medzi najstaršie geometrické nástroje patrí **mesolabon** (obr. 8) skonštruovaný Eratosthenom (okolo 276-196 rokov pred n. l.). Eratosthenova pomôcka slúžila na riešenie úlohy o „zdvojení kocky“. Ide o nasledovnú úlohu: Daná je kocka  $K$  s hranou, ktorej dĺžka je  $a$ . Zostrojte hranu kocky  $K'$ , ktorej dĺžka je  $b$  tak, aby platilo:  $V_{K'} = 2V_K$  ( $V$  je objem kocky).

Princíp Eratosthenovej pomôcky na zostrojenie hrany kocky, ktorej objem je rovný dvojnásobku objemu pôvodnej kocky, spočíva v nasledovnom:

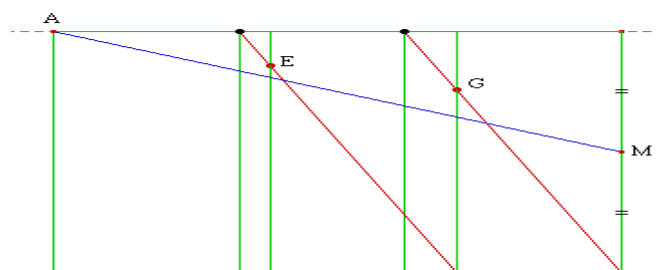
Dané sú dve rovnobežné priamky, tri zhodné obdĺžniky  $AA'E'X$ ,  $BB'G'Y$ ,  $CC'M'Z$  a uhlopriečky  $BG'$ ,  $CM'$ . Obdĺžnik  $AA'E'X$  je umiestnený pevne, obdĺžniky  $BB'G'Y$  a  $CC'M'Z$  je možné rovnobežne posúvať (obr. 9). Označme bod  $E$  priesečník uhlopriečky  $BG'$  a strany  $XE'$  obdĺžnika  $AA'E'X$  a bod  $G$  priesečník uhlopriečky  $CM'$  a strany  $YG'$  obdĺžnika  $CC'M'Z$  (obr. 10).



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

Ak  $M$  je stred strany  $\overline{ZM'}$  obdĺžnika  $CC'M'Z$ , vhodným posúvaním obdĺžnikov  $BB'G'Y$  a  $CC'M'Z$  je možné, že body  $A$ ,  $E$ ,  $G$  a  $M$  sú kolieárne (obr. 11).

Označme dĺžku strán  $|AA'|$ ,  $|BB'|$ ,  $|CC'|$  obdĺžnikov  $AA'E'X$ ,  $BB'G'Y$  a  $CC'M'Z$  ako  $2c$ ,  $x = |EE'|$  a  $y = |GG'|$ .

Podľa Talesovej vety platí :

$$\frac{|OM|}{|OG|} = \frac{|OM'|}{|OG'|} = \frac{|MM'|}{|GG'|} = \frac{c}{y}$$

$$\frac{|OM'|}{|OG'|} = \frac{|OG|}{|OE|} = \frac{|GG'|}{|EE'|} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{|OG|}{|OE|} = \frac{|OG'|}{|OE'|} = \frac{|OE|}{|OA|} = \frac{|OE'|}{|OA'|} = \frac{x}{2c}$$

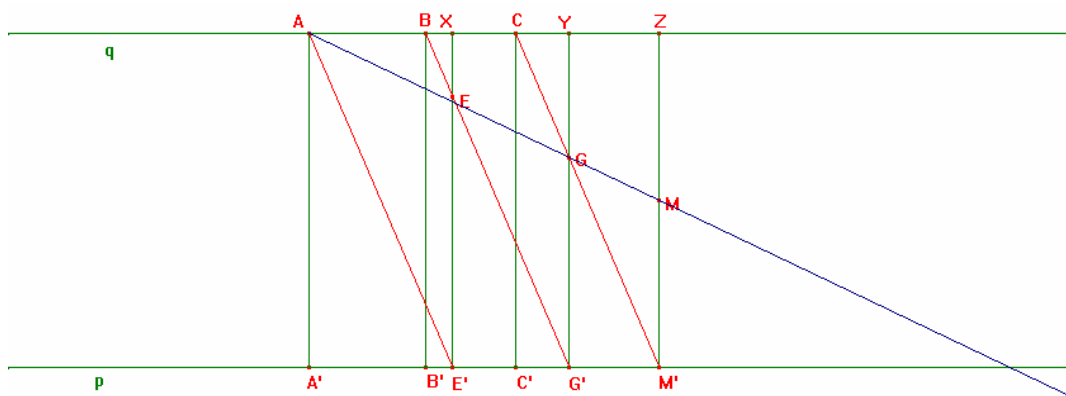
Teda:  $\frac{2c}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{c}$ , t. j.  $x^2 = 2cy$  a  $y^2 = cx$

Z posledných dvoch rovníc dostaneme  $y^4 = c^2x^2 = 2c^3y$ , teda  $y^3 = 2c^3$ .

Ukázali sme, že k danej kocke s hranou dĺžky hrany  $c$  možno zostrojiť kocku s hranou dĺžky  $y$  tak, že objem novej kocky je dvojnásobný, t. j. k úsečke dĺžky  $c$  možno zostrojiť úsečku dĺžky  $y$  tak, že  $y^3 = 2c^3$ . Úloha o duplicitě kocky je takýmto približným spôsobom mechanicky vyriešená.

## 2.1. Mesolabon – simulácia v prostredí Cabri geometrie

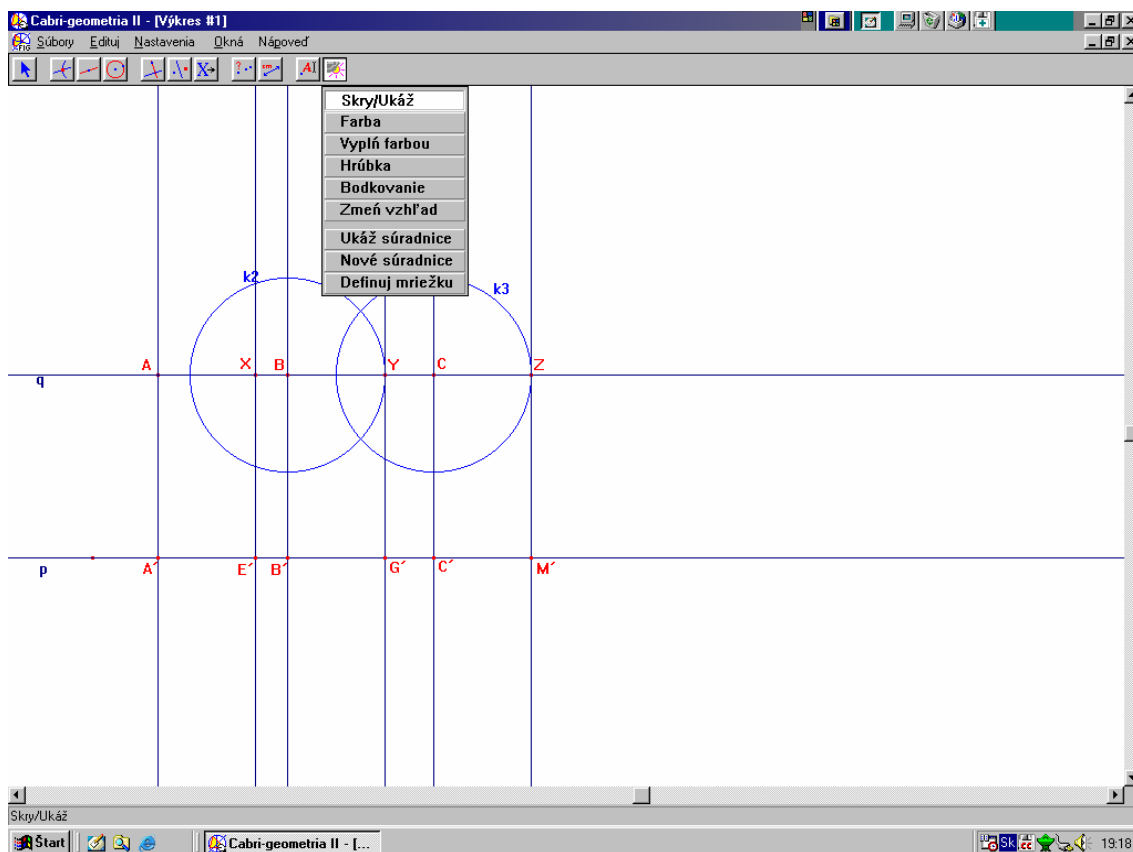
Mesolabon (simulácia v Cabri) (obr. 11) :



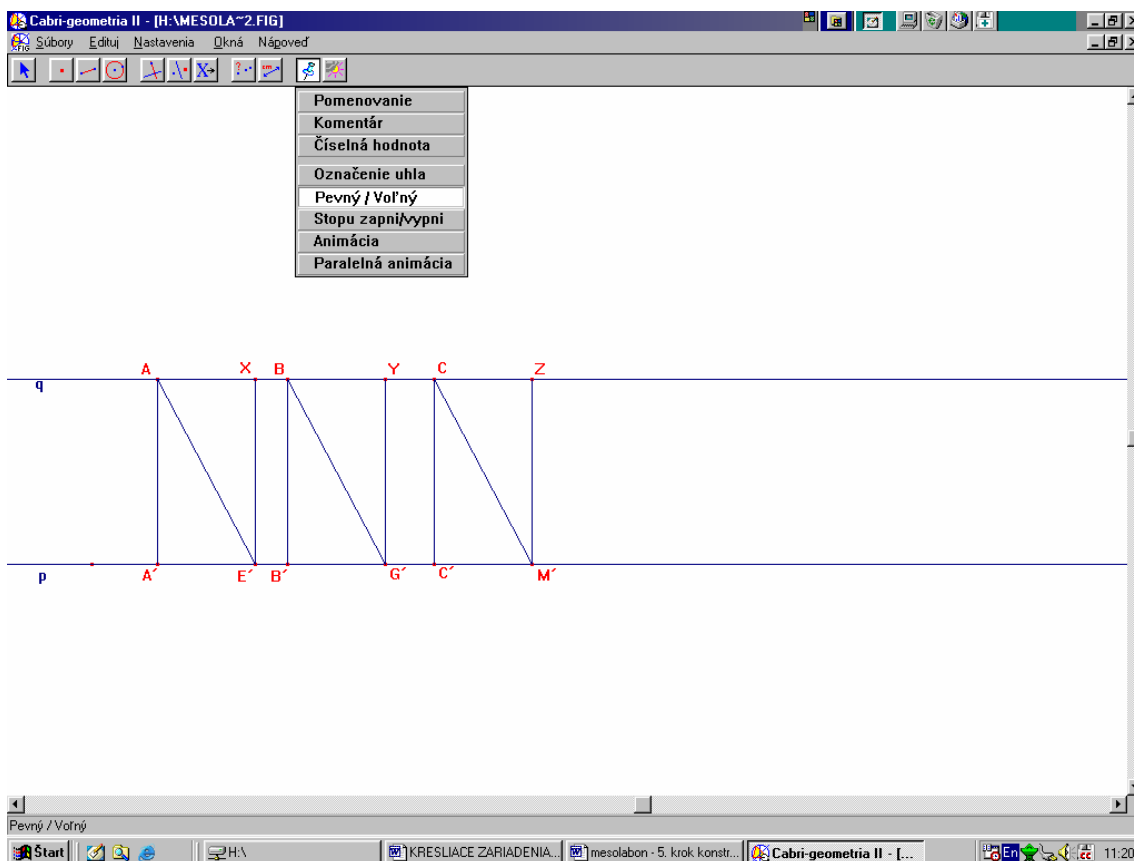
Obr. 11

Postup pri konštrukcii mesolabonu v Cabri geometrii :

1. Zostrojíme priamku  $p$ , bod  $A$ ,  $A \notin p$ .
2. Bodom  $A$  zostrojíme priamku  $q$  rovnobežne s priamkou  $p$ .
3. Na priamke  $q$  zostrojíme body  $B$  a  $C$ .
4. Bod  $X \in \overline{AB}$ .
5. Zostrojíme  $k_2(B;|AX|)$ ,  $k_3(C;|AX|)$ .
6. Označme  $Y \in q \cap k_2(B;|AX|)$ ;  $Z \in q \cap k_3(C;|AX|)$ ;  $\overline{AX} = \overline{BY} = \overline{CZ}$ .
7. Zostrojíme priamky prechádzajúce bodmi  $A, X, B, Y, C, Z$ , ktoré sú kolmé na priamku  $q$  a ich priesečníky s priamkou  $p$  označíme postupne  $A', E', B', G', C', M'$ .
8. Skryjeme kružnice  $k_2, k_3$ , priamky  $\overline{AA'}, \overline{XE'}, \overline{BB'}, \overline{YG'}, \overline{CC'}, \overline{ZM'}$  (obr. 12).
9. Zostrojíme úsečky  $\overline{AA'}, \overline{XE'}, \overline{BB'}, \overline{YG'}, \overline{CC'}, \overline{ZM'}$ .
10. Zostrojíme úsečky  $\overline{AE'}, \overline{BG'}, \overline{CM'}$  (sú to uhlopriečky obdĺžnikov  $AA'E'X$ ,  $BB'G'Y$ ,  $CC'M'Z$ ).
11. Bod  $A$  si zvolíme „pevný“, potom aj obdĺžnik  $AA'E'X$  bude pevný (obr. 13).



Obr. 12



Obr. 13



12. Bod  $E$  zostrojíme ako priesečník uhlopriečky  $\overline{BG'}$  a strany  $\overline{XE'}$  obdĺžnika  $AA'E'X$  a bod  $G$  priesečník uhlopriečky  $\overline{CM'}$  a strany  $\overline{YG'}$  obdĺžnika  $CC'M'Z$  (obdĺžniky  $BB'G'Y$  a  $CC'M'Z$  je možné „umiestniť“ tak, aby body  $E$  a  $G$  existovali).
13. Konštrukciu ukončíme zostrojením polpriamky  $\overline{AM}$ , kde  $M$  je stred úsečky  $\overline{ZM'}$ .
14. V zmysle predchádzajúcich úvah umiestnime obdĺžniky  $BB'G'Y$ ,  $CC'M'Z$  tak, aby body  $A$ ,  $E$ ,  $G$  a  $M$  boli kolíneárne.
15. Označme  $|GG'| = y$ ,  $|MM'| = c$ .
16. Je zrejmé (z predchádzajúcich úvah), že kocka s dĺžkou hrany  $y$  má dvojnásobný objem ako kocka s dĺžkou hrany  $c$ .
17. Zostrojme bod  $P$ ;  $P \in p$ . Posúvaním bodu  $P$  pomocou „ukazovateľa“ v Cabri je možné meniť vzdialenosť priamok  $p$  a  $q$  a teda aj dĺžku hrany kocky  $c$ .

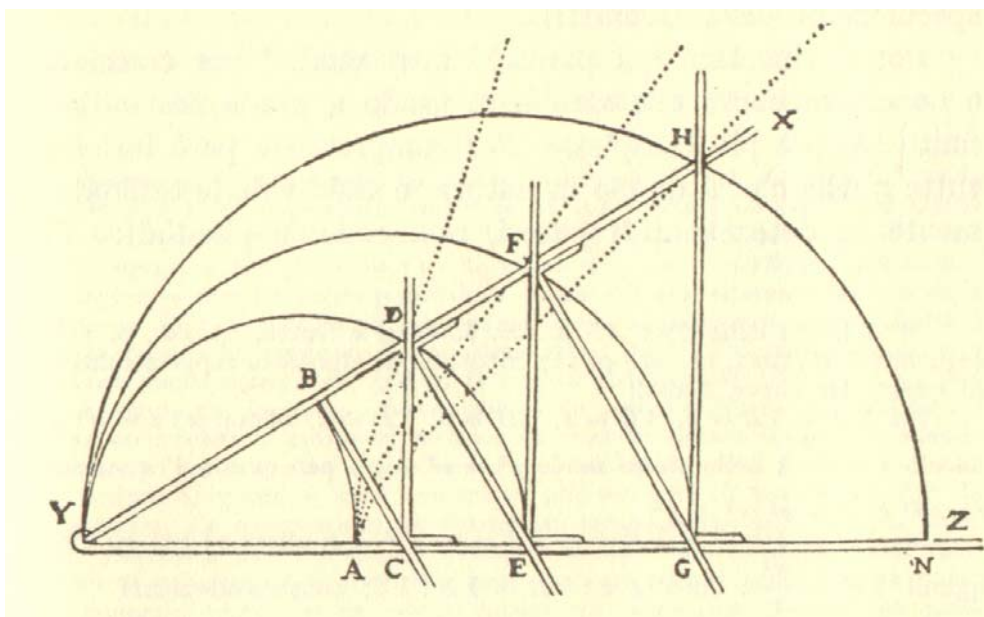
Až v 19. storočí francúzsky matematik Pierre-Laurent Wantzel dokázal, že nie je možné (euklidovsky) zostrojiť hranu kocky, ktorej objem je rovný dvojnásobku objemu pôvodnej kocky, pomocou kružidla a pravítka.

#### 4. Descartov kreslič kriviek

Idey a metódy projektívnej geometrie majú svoju prehistóriu v talianskom renesančnom maliarstve. Renesančný maliar si postavil za cieľ maľovať svet tak, ako ho vidí, maľovať ho z ľudského pohľadu. Objavili sa takto zobrazovacie metódy ako napr. lineárna perspektíva, perspektíva axonometrická, reliéfná perspektíva a pod. K dosiahnutiu lepšieho efektu sa okrem geometrie využívajú aj vlastnosti optiky, ide najmä o nasledovné tri vlastnosti :

1. perspektíva rozmerov – vzdialenejšie predmety treba maľovať menšie
2. perspektíva farieb – vzdialenejšie predmety treba maľovať matnejšími farbami
3. perspektíva kontúr – vzdialenejšie predmety treba maľovať s mäkkšími kontúrami

**Descartov kreslič kriviek** (obr. 14) je popísaný v diele *Geometra* (1637). Meno Descartes je viac známe v súvislosti so zavedením základov analytickej geometrie a algebry.



Obr. 14

Na obrázku 14 sú narysované krivky prechádzajúce bodmi  $A$  a  $B$ ,  $A$  a  $D$ ,  $A$  a  $F$  atď., ktorých konštrukcie použitím uvedeného zariadenia môžeme popísať nasledovne.

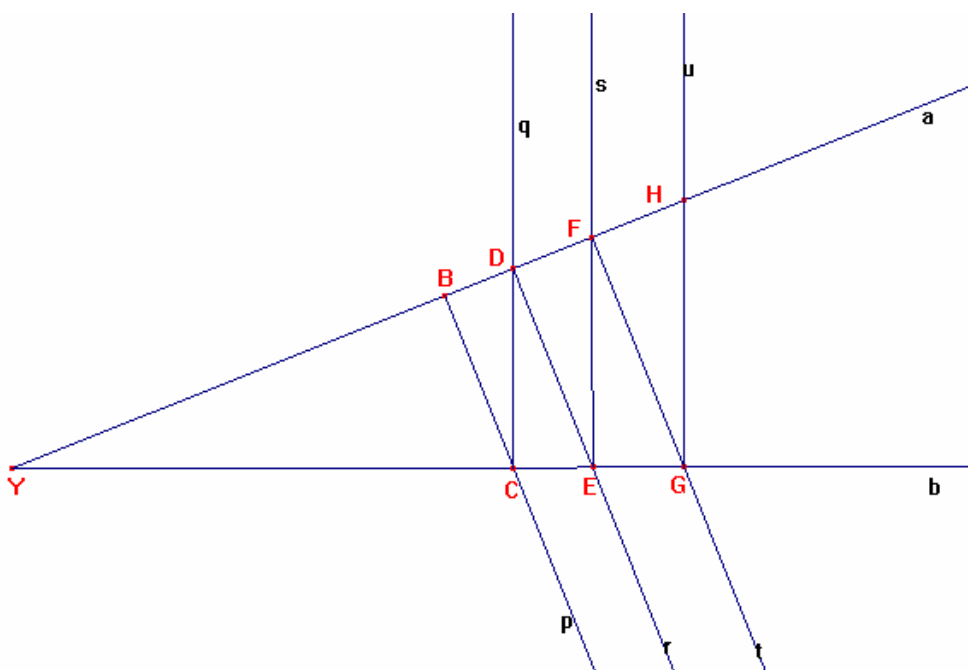
Zariadenie pozostáva z viacerých súčasne sa sklápacích tyčí takým spôsobom, že  $\overline{YZ}$  je umiestnená pozdĺž priamky  $\overline{AN}$ , veľkosť uhla  $\angle XYZ$  môžeme zväčšiť alebo zmenšiť. Ak  $|\angle XYZ|=0^\circ$ , tak sa tyče prekrývajú, body  $A, B, C, D, E, F, G, H$  ležia na priamke  $\overline{YZ}$ ; avšak so zväčšovaním veľkosti uhla  $\angle XYZ$ , tyč  $\overline{BC}$ , upevnená k  $\overline{YX}$  v bode  $B$  pod pravým uhlom, posunie smerom k bodu  $Z$  tyč  $\overline{CD}$ , ktorá sa vždy pod pravým uhlom posunie pozdĺž  $\overline{YZ}$ . Obdobným spôsobom,  $\overline{CD}$  posunie  $\overline{DE}$ , ktorá sa posunie pozdĺž  $\overline{YX}$  rovnobežne s  $\overline{BC}$ ;  $\overline{DE}$  posunie  $\overline{EF}$ ;  $\overline{EF}$  posunie  $\overline{FG}$ ;  $\overline{FG}$  posunie  $\overline{GH}$  atď. Takto si môžeme predstaviť nekonečne veľa tyčí, každá posúvajúc ďalšiu, pričom platí  $|\angle YDC|=|\angle YFE|=|\angle YHG|$  a  $|\angle YCB|=|\angle YED|=|\angle YGF|$ . Ak veľkosť uhla  $|\angle XYZ|$  zväčšíme, bod  $B$  opíše krivku prechádzajúcu bodmi  $A$  a  $B$ , t.j. kružnicu; body  $D, F, H$  opíšu krivky prechádzajúce bodmi  $A$  a  $D$ ,  $A$  a  $F$ ,  $A$  a  $H$ , pričom každá krivka je zložitejšia než predchádzajúca a krivka prechádzajúca bodmi  $A$  a  $D$  zložitejšia než kružnica prechádzajúca bodmi  $A$  a  $B$ . Napriek tomu nevidím dôvod prečo popis kriviek nemôže byť jasný a jednoznačný ako je to pre kružnicu, alebo aspoň ako je to pre kužeľosečku; alebo prečo druhá, tretia alebo ďalšie krivky, ktoré môžu byť takto popísané, nemôžu byť jednoznačne chápané ako prvá: a teda nevidím dôvod prečo nemôžu byť používané rovnakým spôsobom pri riešení geometrických úloh.“ (Descartes, *Geometra*, 1637)

#### 4.1. Descartov kreslič kriviek – simulácia v prostredí Cabri geometrie

Descartov kreslič kriviek (simulácia v Cabri) (obr. 15):

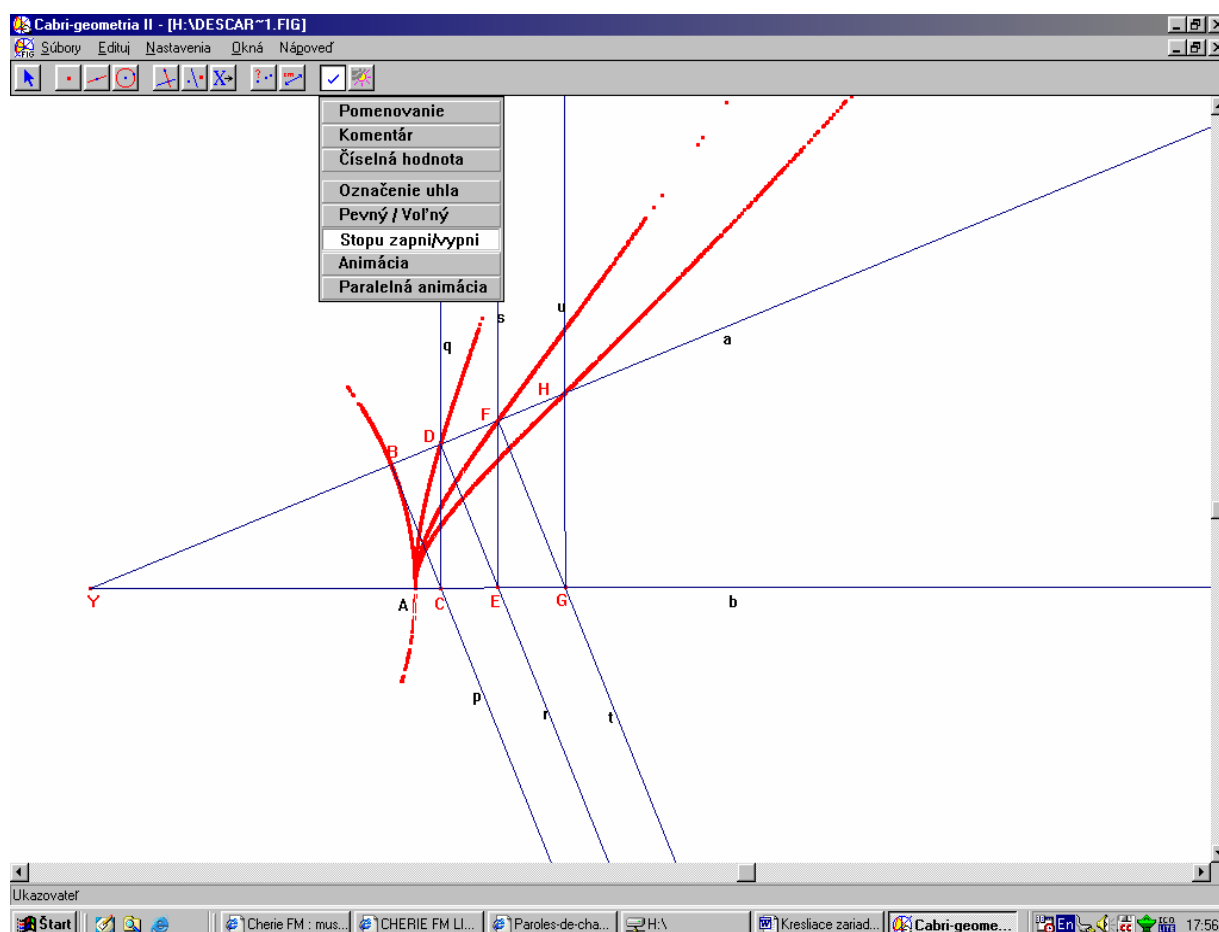
Postup pri zostrojení simulácie Descartovho kresliča krivky v Cabri geometrii:

1. Zostrojíme uhol  $\alpha$  (vrcholom bod  $Y$  a ramenami  $a, b$ ).
2. Zvolíme bod  $B$  na ramene  $a$ .
3. Bodom  $B$  zostrojíme priamku  $p$  kolmú na rameno  $a$ . Označme  $C = p \cap b$ .



Obr. 15

4. Zostrojíme polpriamku  $\overrightarrow{BC}$ .
5. Bodom  $C$  zostrojíme priamku  $q$  kolmú na rameno  $b$  a priesečník priamky  $q$  a ramena  $a$  označíme bod  $D$ .
6. Zostrojíme polpriamku  $\overrightarrow{CD}$ .
7. Bodom  $D$  zostrojíme priamku  $r$  rovnobežne s polpriamkou  $\overrightarrow{BC}$ , priesečník priamky  $r$  s ramenom  $b$  označíme bod  $E$ .
8. Zostrojíme polpriamku  $\overrightarrow{DE}$ .
9. Bodom  $E$  zostrojíme priamku  $s$  rovnobežne s polpriamkou  $\overrightarrow{CD}$ , priesečník priamky  $s$  a ramena  $a$  označíme  $F$ .
10. Analogicky bod  $G$  ( $t; t \parallel \overrightarrow{DE} \wedge F \in t$  a  $G \equiv t \cap b$ ).
11. Analogicky bod  $H$  ( $u; u \parallel s \wedge G \in u$  a  $H \equiv u \cap a$ ).
12. Body  $B, D, F, H$  opisujú krivky pomocou funkcie „stopa“ pri pohybe ramena  $a$ . Označme  $A \in stopa \cap b$ . Bod  $B$  opíše krivku prechádzajúcu bodmi  $A, B$ , t.j. kružnicu; body  $D, F, H$  opíšu krivky prechádzajúce bodmi  $A$  a  $D, A$  a  $F, A$  a  $H$  (obr. 16).

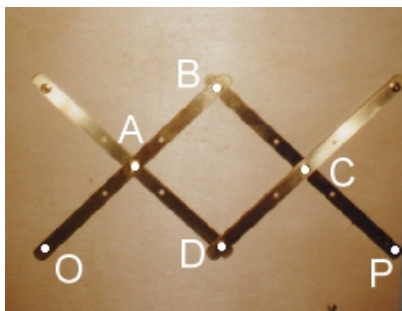


Obr. 16

## 5. Scheinerov pantograf

Najstarším mechanickým zariadením, ktoré sa používali na zostrojenie obrazov nejakých útvarov v rovinných zobrazeniach, je pantograf. V 16. storočí bol pantograf používaný maliarmi na zväčšenie alebo zmenšenie kresby, neskôr však bol zdokonalený a opísaný Scheinerom (okolo roku 1631) a používaný aj na maľovanie v perspektíve.

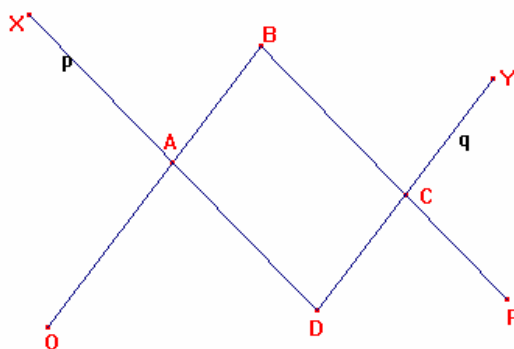
**Scheinerov pantograf** na rovnôľahlosť (obr. 17) :



Obr. 17

Štyri tyče sa otáčajú zachovávajúc pritom tvar rovnobežníka  $ABCD$ . Bod  $O$  je fixný. Body  $D$  a  $P$  (body  $O, D, P$  ležia na tej istej priamke) sú vo vzťahu rovnôľahlosti  $h(O;k)$ , kde  $k = \frac{|BO|}{|AO|}$ .

### 5.1. Scheinerov pantograf - simulácia v prostredí Cabri geometrie

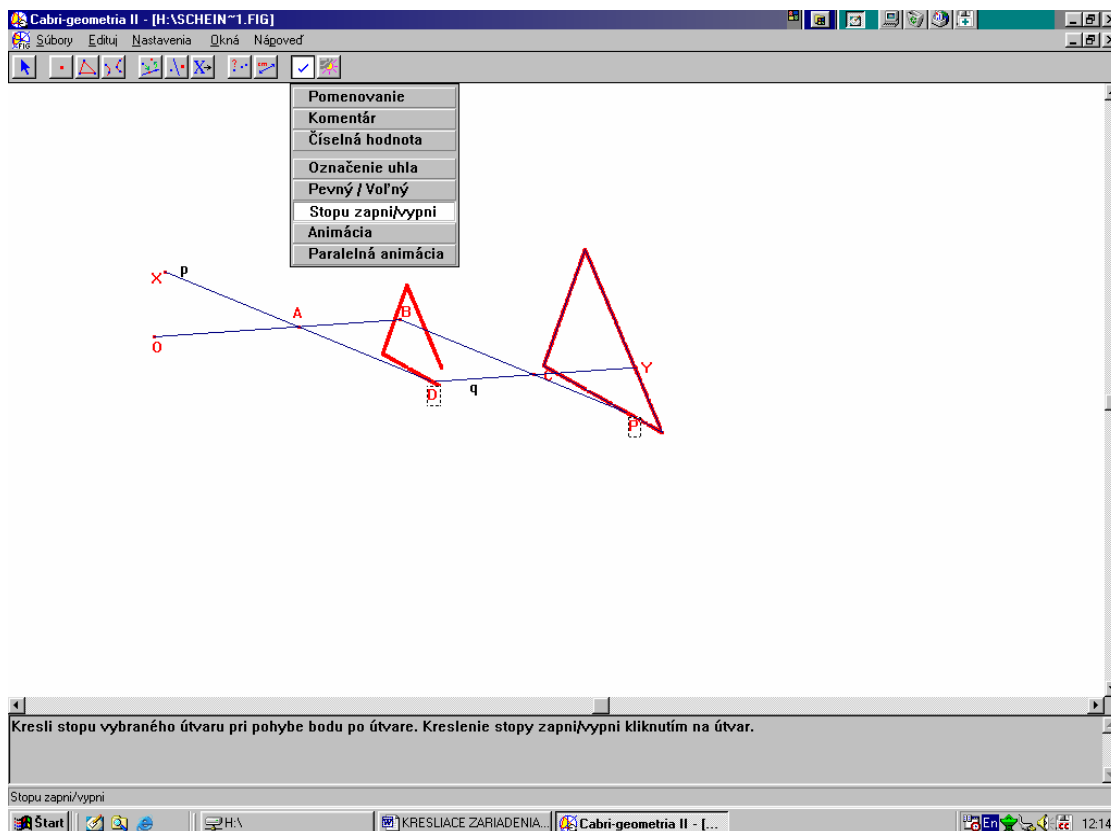


Obr. 18

Postup pri konštrukcii Scheinerovho pantografu v Cabri (obr. 18):

1. Zostrojíme body  $O$  a  $P$ .
2. Zostrojíme zhodné kružnice  $k_1(O;r)$  a  $k_2(P;r)$ ,  $r \in R$ ,  $2r > |PO|$ . Označme jeden z priesečnikov kružníc  $B \in k_1 \cap k_2$ .
3. Zostrojíme úsečky  $\overline{OB}$  a  $\overline{BP}$ .
4. Bod  $A$  je ľubovoľný bod úsečky  $\overline{OB}$ . Bodom  $A$  zostrojíme priamku  $p$  rovnobežne s úsečkou  $\overline{BP}$ .
5. Zostrojíme priamku  $\overline{OP}$ .
6. Označme  $D \in p \cap \overline{OP}$ .
7. Bodom  $D$  zostrojíme priamku  $q$  rovnobežne s úsečkou  $\overline{OB}$ . Priesečník priamky  $q$  a úsečky  $\overline{BP}$  označme  $C$ .
8. Zostrojíme polpriamky  $\overrightarrow{DA}$  a  $\overrightarrow{DC}$ .
9. Zostrojíme kružnice  $k_3(A;|AO|)$  a  $k_4(C;|CP|)$ .
10. Označme  $X \in k_3 \cap \overrightarrow{DA}$ ,  $Y \in k_4 \cap \overrightarrow{DC}$ .

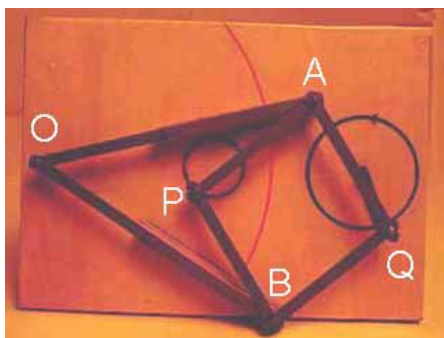
11. Body  $D$  a  $P$  pomocou „stopy“ opisujú útvary, ktoré sú vo vzťahu rovnobežnosti  $h(O; k)$ , kde  $k = \frac{|BO|}{|AO|}$  (obr. 19). Z toho vyplýva, že koeficient  $k$  rovnobežlosti  $h$  závisí od polohy bodu  $A$  na úsečke  $\overline{OB}$ .



Obr. 19

## 6. Peaucellierov inverzor

*Inverzor* – prístroj na konštrukciu obrazu bodov v kružnicovej inverzii so stredom  $O$  a polomerom  $r$  - pozostáva zo šiestich tyčí, z toho štyri najmenšie tvoria kosoštvorec  $PAQB$ , zatiaľ čo dve najdlhšie (obe rovnakej dĺžky) spájajú body  $A, O$  a  $B, O$ , kde  $O$  je pevný bod. Body  $P$  a  $Q$  sú vzor a obraz v kružnicovej inverzii so stredom v bode  $O$  a určujúcou kružnicou  $k(O; r)$ . Keď sa bod  $P$  pohybuje po nejakej kružnici  $c$ , ktorá prechádza bodom  $O$ ,  $Q$  sa pohybuje po priamke  $p$ . **Peaucellierov inverzor** (obr. 20):

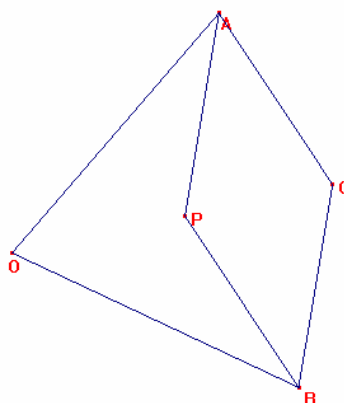


Obr. 20

### 6.1. Peaucellierov inverzor - simulácia v prostredí Cabri geometrie

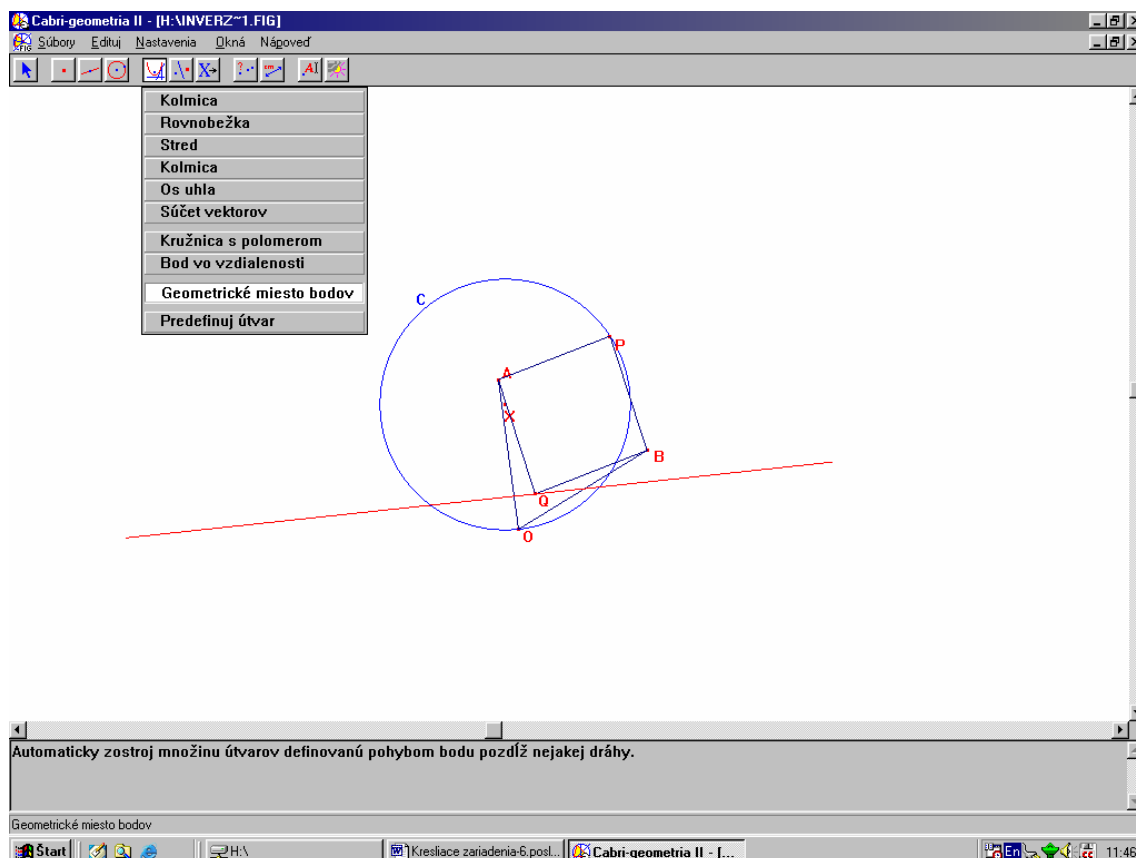
Postup pri konštrukcii inverzoru v Cabri geometrii (kružnicová inverzia  $\varphi$  je daná kružnicou  $k(O;r)$ ) (obr. 21):

1. Zostrojíme kružnicu  $k(O;r)$  a bod  $P$ ,  $O \neq P$ .
2. Zostrojíme inverzný bod  $Q$  k bodu  $P$  v kružnicovej inverzii  $\varphi$  (využijeme príkaz „Inverzia“ v Cabri).
3. Zostrojíme úsečku  $\overline{PQ}$ , stred úsečky  $\overline{PQ}$ , označme ho  $S$ .



Obr. 21

4. Bodom  $S$  zostrojíme priamku  $o$  kolmú na úsečku  $\overline{PQ}$ .
5. Zostrojíme ľubovoľnú kružnicu  $k_1(O;r_1)$ ,  $r_1 > |OS|$ .
6. Označme bod  $A \in k_1 \cap o$  a bod  $B \in k_1 \cap o$ .

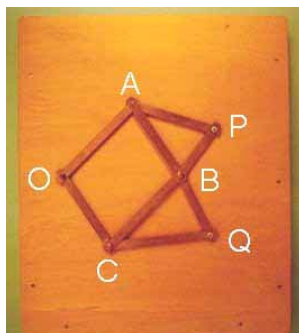


Obr. 22

7. Zostrojíme  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{AP}$ ,  $\overline{PB}$ ,  $\overline{BQ}$ ,  $\overline{AQ}$ .
8. Skryjeme kružnice  $k$  a  $k_1$ , priamku  $o$ , úsečku  $\overline{PQ}$  a bod  $S$ .
9. Zostrojíme ľubovoľnú kružnicu  $c(X; r_1)$  ( $X$  je ľubovoľný bod) tak, že bod  $O \in c$ .
10. Predefinujeme charakteristiky bodu  $P$  tak, že kružnica  $c$  prechádza bodom  $P$  (využijeme príkaz „Predefinuj útvar“).
11. Množinu bodov  $Q'$  pri pohybujúcom sa bode  $P$  vytvorí priamku  $m$  (obr. 22).

## 7. Sylvestrov Pantograf

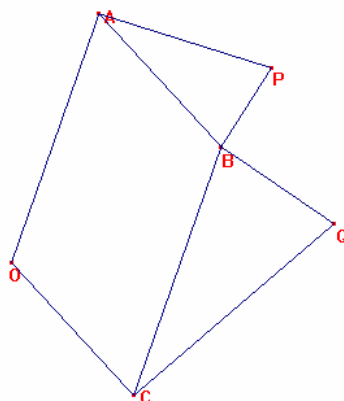
**Sylvestrov pantograf** (obr. 23) slúži na konštrukciu obrazu bodov v rotácii  $\rho(O; \alpha)$ . Pantograf sa skladá z ôsmich tyčí, z ktorých štyri tvoria rovnobežník  $OCBA$ , bod  $O$  je fixný. Trojuholníky  $APB$  a  $CQB$ , ako aj  $OPQ$  sú podobné ( $|AP| = |AB|$ ;  $|QC| = |CB|$ ;  $|OP| = |OQ|$ ). Bod  $Q$  je obraz bodu  $P$  v rotácii so stredom  $O$  a uhlom  $\alpha = |\angle PAB| = |\angle BCQ| = |\angle POQ|$ .



Obr. 23

Sylvestrov pantograf umožňuje v skutočnosti realizovať len jednu jedinú rotáciu nakoľko dĺžky ôsmich tyčí sú pevne dané a nezmeniteľné. Ďalším mechanickým obmedzením je veľkosť uhla  $\alpha$ :  $0 < |\alpha| < \pi$ . Dĺžky strán rovnobežníka  $OCBA$  sú pevne dané; ak poznáme veľkosť uhla  $\alpha$ , dĺžky tyčí  $|PB|$  a  $|BQ|$  môžeme vyjadriť ako  $|PB| = |OC| \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$  a  $|BQ| = |OA| \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$ .

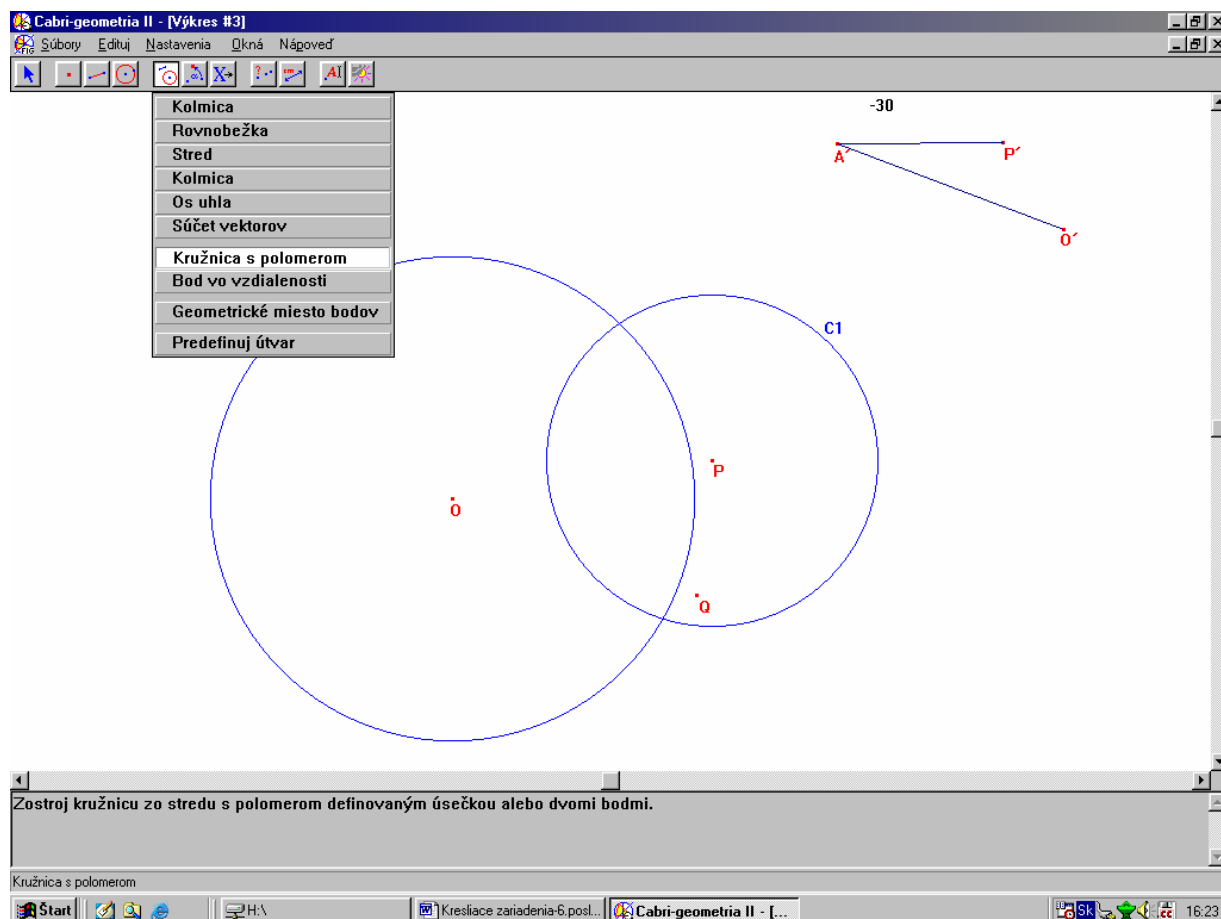
### 7.1. Sylvestrov pantograf - simulácia v prostredí Cabri geometrie



Obr. 24

Postup pri konštrukcii simulácie Sylvestrovho pantografu (obr. 24) :

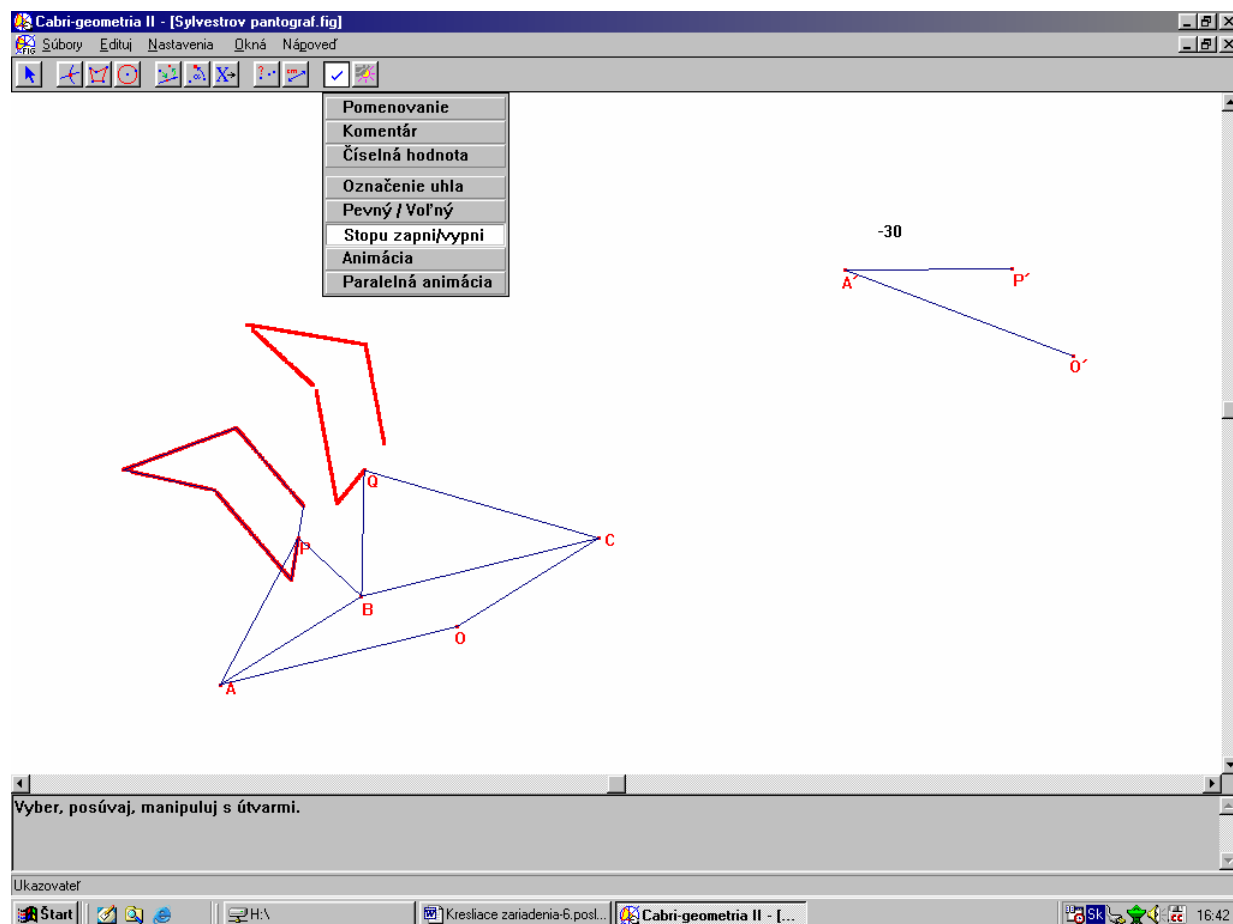
1. Zostrojíme body  $O$  a  $P$ ,  $O \neq P$ , vytvoríme číselnú hodnotu  $-30$ , potom použijeme príkaz „otočenie“ a zostrojíme bod  $Q$  ako obraz bodu  $P$  v rotácii  $\rho(O; \alpha = -30^\circ)$ .
2. Zostrojíme ľubovoľné úsečky  $\overline{O'A'}$  a  $\overline{A'P'}$  tak, aby veľkosti úsečiek  $|O'A'|$ ,  $|A'P'|$  a  $|OP|$  spĺňali trojuholníkovú nerovnosť.
3. Zostrojíme kružnice  $c(O; |O'A'|)$  a kružnice  $c_1(P; |A'P'|)$  (obr. 25).
4. Označme jeden z priesečníkov bod  $A$ ;  $A \in c \cap c_1$ .
5. V rotácii  $\rho_1(A; \alpha = -30^\circ)$  zostrojíme obraz bodu  $P$ , označme ho  $B$ .
6. Zostrojíme úsečky  $\overline{OA}$ ,  $\overline{AP}$ ,  $\overline{PB}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BQ}$ .
7. Bod  $C$  zostrojíme ako priesečník priamky  $p$  prechádzajúcu bodom  $O$  rovnobežne s úsečkou  $\overline{AB}$  a priamky  $r$  prechádzajúcu bodom  $B$  rovnobežne s úsečkou  $\overline{OA}$ .
8. Zostrojíme úsečky  $\overline{CB}$ ,  $\overline{CQ}$  a  $\overline{CO}$ .



Obr. 25

9. Skryjeme kružnice  $c$  a  $c_1$ , priamky  $p$  a  $r$ .
10. Body  $P$  a  $Q$  pomocou „stopy“ opisujú útvary, ktoré sú vo vzťahu „vzor a obraz“ v rotácii  $\rho(O; \alpha)$ . Veľkosť uhla  $\alpha$  je možné zmeniť zmenou hodnoty číselného údaju (obr. 26).





Obr. 26

## 8. Záver

Záujem o štúdium mechanických systémov postupne ubúdala u matematikov – vedcov a stal sa základom pre Teóriu nástrojov, zariadení a robotiky.

Niektoré diela a práce výskumníkov poukazujú na možný význam mechanických zariadení vo výuke geometrie, akými sú rozpravy H. Lebesguea (1941) týkajúce sa teoretickej časti, práce G. Brousseau (1986), R. Gras (1983) a didaktickej skupiny Univerzity Modena pod vedením M. Bartolini Bussi (1998) týkajúce sa didaktického inžinierstva.

## Literatúra

- [1] BÁLINT L., KRIŽALKOVIČ K. (1988) *Album slávnych matematikov*. Učebné pomôcky, Banská Bystrica.
- [2] BARTOLINI BUSSI M. (1993) Geometrical Proofs and Mathematical Machines : An Exploratory Study. *Proceedings of the 17<sup>th</sup> PME Conference*, vol. II, 97-104. The Program Committee of the 17<sup>th</sup> PME Conference, Tsukuba (Japan).
- [3] BARTOLINI BUSSI M., PERGOLA M. (1994) Mathematical Machines in the Classroom : the History of Conic Sections. In *Malara A, Rico L. : Proceedings of the First Italian-Spanish Symposium in Mathematics Education*, 233-240. Modena : Dipartimento di Matematica-Università di Modena.
- [4] BARTOLINI BUSSI M. (1996) Drawing instruments : Historical and didactical issues, *8th International Congress on Mathematical Education Selected Lectures*, Sevilla, jún 1996.

- [5] BARTOLINI BUSSI M., PERGOLA M. (1996) History in the Mathematics Classroom : Linkages and Kinematic Geometry. In Jahnke H. N., Knoche N., Otte M. (eds), *History of Mathematics and Education : Ideas and Experiences*. Goetingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 39-67.
- [6] BARTOLINI BUSSI M. (1998) Drawing Instruments : Theories and Practices from History to Didactics. *Documenta Mathematica – Extra Volume ICM 1998*, č. 3, str. 735-746.
- [7] BEREKOVÁ H., FÖLDESIOVÁ L., HRÍBIKOVÁ I., REGECOVÁ M., TRENČANSKÝ I. (2001) Slovník teórie didaktických situácií, 1. časť. *Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky*, Bratislava.
- [8] BEREKOVÁ H., FÖLDESIOVÁ L., REGECOVÁ M., KREMŽÁROVÁ L., SLÁVIČKOVÁ M., TRENČANSKÝ I., VANKUŠ P., ZÁMOŽÍKOVÁ Z. (2003) Slovník teórie didaktických situácií, 2. časť. *Zborník 5 Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky*, str. 113-122, Bratislava.
- [9] BERTHELOT R. (2001) The role of spatial knowings in the elementary teaching of geometry. *Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky*. Bratislava.
- [10] BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 7, č. 2, 33-115.
- [11] BROUSSEAU G. (1998) Théorie des situations didactiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. Vol. 7, č.2, str. 33-115. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- [12] COLLETTA M., GENCO G., KREMŽÁROVÁ L., REGECOVÁ M. (2004) Isometry in the Plane (initial teacher training for future teacher of secondary school). *Zborník 6 Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky*, str. 27-38, Bratislava.
- [13] GRAS R. (1983) Instrumentation de notions mathématiques, un exemple : la symétrie. *Petit X*, č. 1, str. 7-39.
- [14] HRDINOVÁ, D., KOREŇOVÁ, L. (2000) Informačné a komunikačné technológie v matematike ZŠ a SŠ. CD. Učiteľský neinvestičný fond MCMB s finančnou podporou OSF Bratislava.
- [15] KREMŽÁROVÁ L. (2002) La géométrie comme outil de modélisation. <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/ThBaLilla.htm>
- [16] KREMŽÁROVÁ L. (2003) La géométrie comme outil de modélisation. *Zborník 5 Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky*, str. 49-60, Bratislava.
- [17] KVASZ, L. Kapitoly z dejín algebry. [www.matika.sk/zdroje/texty/recenz/Dejalg/](http://www.matika.sk/zdroje/texty/recenz/Dejalg/)
- [18] Laborde C. (1992) Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, Conférence plénière au 7ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques, ICME 7, Québec, Canada, august 1992.
- [19] LABORDE C., CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 14, č. 12, str. 165-210.
- [20] LABORDE J.-M. (1995) Des connaissances abstraites aux réalités artificielles, le concept de micromonde Cabri. In *Environnements interactifs d'apprentissage avec ordinateur*, Baron M., Guin D., Nicaud J.-F. (eds) (str. 29-40). Paris : Eyrolles.
- [21] LEBESQUE H. (1950) *Leçons sur les constructions géométriques*. Paris : Gauthier-Villars.
- [22] OTTE M., SEEGER F. (1994) *The Human Subject in Mathematics Education and in the History of Mathematics*, in R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straesser, B. Winkelmann, *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 351-365, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- [23] RABARDEL (1995) Qu'est-ce qu'un instrument? appropriation, conceptualisation, mises en situation. *Les dossiers de l'ingénierie éducative*, Des outils pour le calcul et le traçage des courbes, č. 19. CNDP.
- [24] REGECOVÁ M. (2005) *Analytická geometria a vektorový počet vo vyučovaní matematiky na strednej škole*. Dizertačná práca. FMFI UK Bratislava.

- [25] ROUSSELET M. (1994) La simulation des systèmes articulés. In *abraCadaBRI*, č.2.
- [26] RYBÁR J. (1994) *Kapitoly z epistemológie II*. Vysokoškolské skriptá, Univerzita Komenského v Bratislave, str. 36 - 50.
- [27] SANGARÉ M. S. (2003) La machine de Sylvester. Principes Mécaniques et Principes Mathématiques. Une Étude de Cas. *Petit X*, č.63.
- [28] SOLČAN Š. (1995) *Projektívna Geometria*. Vysokoškolské skriptá MFF UK. Univerzita Komenského. Bratislava.
- [29] SPAGNOLO F., ČIŽMÁR J. (2003) *Komunikácia v matematike na strednej škole*. Masarykova Univerzita, Brno.
- [30] SPAGNOLO F., TRENČANSKÝ I. (2001) Efficacité de l'enseignement du calcul vectoriel. *Quaderni do Ricerca in Didattica*. Palermo.
- [31] TRENČANSKÝ I. (1992) Problème ouvert. *Didactical Technical Report*. Bratislava.
- [32] TRENČANSKÝ I. (2001) Možnosti teórie didaktických situácií na zefektívnenie učenia sa. *Zborník 4 bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky*. Bratislava.
- [33] <http://dipmat.math.unipa.it/~grim>
- [34] <http://www.ardm.fr>
- [35] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history>
- [36] <http://www.chronomath.com>
- [37] <http://www.infovek.sk>
- [38] <http://www.irem.fr>
- [39] <http://www.museo.unimo.it>