INTEGRÁCIA POZNATKOV Z KOMBINATORIKY DO VYUČOVANIA MATEMATIKY NA ZÁKLADNEJ ŠKOLE – POHĽAD DRUHÝ

Iveta Scholtzová

Katedra matematickej edukácie, Pedagogická fakulta, Prešovská univerzita
Ul. 17. novembra 1, 081 16 Prešov, SR
e-mail: scholtzi@unipo.sk

Abstract. Curriculum of Mathematics for elementary school is open for inclusion of combinatorics. Combinatory tasks need not necessarily appear only as a thematic part of Combinatorics unit. There are also options in other units for implementation of combinatorics respecting the elements of task-solving processes formulated by the author.

Key words: mathematics, elementary school, combinatorics, task-solving elements

1. Úvod

Príspevok nadväzuje na článok [3] publikovaný v *Acta Facultatis Paedagogicae Universitatis Tyrnaviensis, Ser. C, 2002, no. 6.*

Kvantitatívna analýza pedagogického experimentu, zameraného na rozvíjanie kombinatorického myslenia u žiakov základnej školy ukázala, že zaraďovanie skupín kombinatorických úloh do vyučovania matematiky je efektívne. Je to vhodný prostriedok na cieľavedomé rozvíjanie kombinatorických schopností žiakov v edukačnom procese.

Následná kvalitatívna analýza získaných poznatkov z žiackych riešení kombinatorických úloh priniesla nové informácie a podnety pre integráciu elementov kombinatoriky do matematickej edukácie na základnej škole.

2. Kombinatorické úlohy v iných témach matematiky a elementy ich riešenia

V rámci pedagogického experimentu boli vytvorené skupiny úloh pre 6. a 7. ročník základnej školy, aj pre 4. ročník. Tieto súbory obsahovali úlohy, ktorých cieľom bolo zámerne rozvíjať u žiakov schopnosť riešiť elementárne kombinatorické úlohy. Úlohy boli navrhnuté a vytvorené vo forme skupín ku konkrétnym témam z učiva matematiky. Úlohy boli formulované tak, aby sa mohli zaradiť priamo do vyučovania, bez osobitného výkladu a bez znalosti nových faktov a pojmov.

Kvalitatívna analýza žiackych riešení bola základom pre formulovanie ***elementov riešenia úloh z kombinatoriky***, ktorým je, podľa nášho názoru, potrebné venovať pozornosť pri príprave a riešení kombinatorických úloh.

Element č.1: Analýza textu a nadobudnutie vhľadu do situácie úlohy.

Element č.2: Výber vhodnej metódy a stratégie riešenia.

Element č.3: Vymenovanie všetkých konfigurácií.

Element č.4: Propedeutika pre pravidlo súčinu.

Element č.5: Propedeutika pre pravidlo súčtu – umenie roztriediť.

Supported by research grant of Slovak Ministry of Education – KEGA 3/3073/05.

Element č.6: Kedy sú dva objekty „rovnaké“?

Element č.7: Grafické znázornenie.

Element č.8: Divergentné úlohy – rozvoj divergentného myslenia.

Element č.9: Usporiadanie versus neusporiadanie.

Element č.10: Prvky v objektoch – najviac raz, práve raz, alebo aj viackrát?

Element č.11: Organizácia a systém.

Element č.12: Interpretácia výsledku.

Element č.13: Vytvorenie úlohy.

Uvedieme ukážky niekoľkých vytvorených úloh a ročník, v ktorom boli riešené. Prezentujeme tiež návrhy vhodnosti úloh aj pre iné témy ako Kombinatorika a analýzu vzhľadom na elementy riešenia úloh z kombinatoriky. Sledované javy dokumentujeme ukážkami žiackych riešení.

2.1. Analýza textu a nadobudnutie vhľadu do situácie úlohy

Sledovali sme, či žiaci porozumeli textu úlohy, či chápu hlavnú myšlienku úlohy. Ak takáto situácia nastala, mali by ju v riešení vedieť zapísať prípadne graficky znázorniť. Nadobudnúť vhľad do situácie úlohy je niečo viac ako porozumieť textu úlohy. Všímali sme si, či žiaci dôkladne rozumeli všetkým objektom a znakom textu úlohy a tiež vzťahom medzi objektami.

6. ročník, Deliteľnosť prirodzených čísel
Nájdite všetky navzájom rôzne číslice X, Y tak, aby vzniknuté štvorciferné číslo XYYX bolo deliteľné tromi a piatimi súčasne.
V niektorých riešeniach žiaci nenadobudli dostatočný vhľad do situácie, nakoľko vytvárali aj štvorciferné čísla, ktoré neboli deliteľné tromi a piatimi súčasne, napr. 5335, 5225, 6336. Alebo aj čísla, ktoré neboli štvorciferné, napr. 0660. Podľa nášho názoru, niektorí respondenti v snahe vytvoriť čo najviac konfigurácií (uplatnenie kombinatorického princípu), „zabudli“ na podmienky v zadaní úlohy.

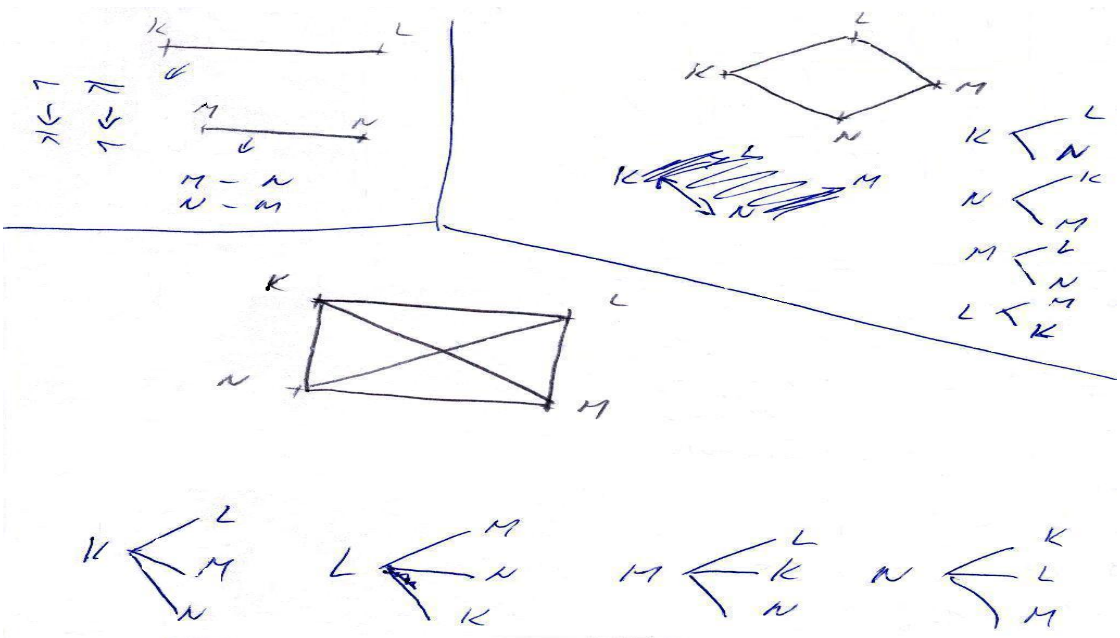
6. ročník, Trojuholník, Obvody rovinných útvarov
Dĺžky strán rovnoramenného trojuholníka sú vyjadrené celými číslami. Jeho obvod je 21(24) cm. Určte dĺžky strán všetkých rovnoramenných trojuholníkov, ktoré vyhovujú daným podmienkam. Odôvodnite svoj postup riešenia.
Ani jedno žiacke riešenie nebolo úplné. Po analýze sme zistili, že najbližšie k správnemu boli tri riešenia, v ktorých chýbala konfigurácia 7-7-7 resp. 8-8-8. To poukazuje na nedostatočný vhľad do situácie, v predstavách žiakov rovnostranný trojuholník nie je rovnoramenný. Naproti tomu respondenti správne analyzovali text a zaregistrovali aj nevyslovenú podmienku v texte úlohy – trojuholníkovú nerovnosť. Nerešpektovali ju 4 žiaci.

6. ročník, Zlomky
Z číslic 0, 2, 5 (0, 3, 7) vytvorte všetky zlomky, ktoré dokážete. Zistite, či sú medzi vytvorenými zlomkami také, ktoré sa rovnajú. Ak áno, vytvorené zlomky roztrieďte do skupín podľa veľkosti.
Žiaci správne analyzovali text a vytvárali zlomky. Niektorí však nenadobudli dostatočný vhľad do situácie úlohy a vytvárali aj zlomky s nulou v menovateli, ktoré nemajú zmysel. U mnohých žiakov absentovali zlomky s nulou v čitateli.

2.2. Výber vhodnej metódy a stratégie riešenia

Venovali sme pozornosť tej časti žiackeho riešenia, kedy nastáva rozhodovací proces o spôsobe, akým bude žiak danú úlohu riešiť. Zvýšenú pozornosť sme venovali tým riešeniam, v ktorých sa v jednej úlohe vyskytla viac ako jedna metóda resp. stratégia riešenia. Všímali sme si, pre ktorú sa riešiteľ rozhodol ako pre prvú a pre ktorú až neskôr.

<u>6. ročník, Teória grafov</u>
Štyri kamarátky boli na jednej diskotéke (označme ich K, L, M, N), neprišli však spolu. Znázornite graficky (pomocou bodov a úsečiek) nasledujúce situácie: a) každá sa pozdravila práve s jednou; b) každá sa pozdravila práve s dvoma; c) každá sa pozdravila práve s troma.
Žiaci vo svojom riešení urobili grafické znázornenie daných situácií tak, ako to vyžadovalo zadanie úlohy. Táto riešiteľská stratégia však pre nich nebola dostatočne presvedčivá. „Cítili“ ešte potrebu doplniť svoje riešenie vypísaním všetkých možností prostredníctvom stromového grafu. Napr.



<u>7. ročník, Kombinatorika</u>
Milan navštívil cez prázdniny s rodičmi štyri mestá na Slovensku: Čadcu, Michalovce, Brezno a Komárno. Nájdite a napíšte všetky možné poradia návštevy jednotlivých miest. Koľko je rôznych poradí?
Klasická kombinatorická úloha na všetky možné usporiadania daného počtu prvkov. U siedmakov, ktorí už mali určité kvantum poznatkov z kombinatoriky zo šiesteho ročníka, bolo zaujímavé sledovať, akú riešiteľskú stratégiu si zvolia. Najčastejšie používanou metódou, vo viac ako polovici riešení, bol stromový graf. V polovici riešení sa vyskytlo vypisovanie všetkých usporiadaných konfigurácií. V tretine riešení bolo použité kombinatorické pravidlo súčinu. Napriek tomu, že metódu „stromový graf“ určite nemožno považovať za prirodzený postup v žiackom riešení, väčšina žiakov ju použila. Podľa nášho názoru je táto metóda svojim grafickým spracovaním tak výrazná, že sa dobre zafixovala v mysliach žiakov, a preto ju používajú. Vyskytli sa aj také riešenia, kde boli použité všetky tri spomínané metódy, v rôznom poradí.

2.3. Vymenovanie všetkých konfigurácií

Najjednoduchšia (zdanlivo) metóda na vyriešenie kombinatorickej úlohy:

1. systematicky vymenovať a popísať všetky navzájom rôzne konfigurácie vyhovujúce podmienkam úlohy;
2. takto získané konfigurácie jednoducho spočítať, t.j. očíslovať ich prirodzenými číslami od 1 do m.

Metóda je vhodná, ak je celkový počet konfigurácií malý. Je potrebné dôsledne dodržiavať dve zásady:

a) Boli vymenované všetky konfigurácie?

b) Nebola vymenovaná omylom niektorá konfigurácia viackrát?

Preto sa vyžaduje systematický postup pri vypisovaní všetkých možností a potrebná je kontrola vypísaných konfigurácií, či sa nevyskytujú rovnaké.

Táto metóda je jednoznačne najčastejšie používanou pri riešení kombinatorických úloh na 1. a 2. stupni základnej školy. Predstavuje, podľa nášho názoru, najprirodzenejšiu cestu pre žiaka v jeho zvyčajne procesuálnom prístupe k riešeniu kombinatorickej úlohy.

Vymenovanie všetkých konfigurácií sa v žiackych riešeniach, až na niekoľko výnimiek, nedialo systematicky. Respondenti tiež často neskontrolovali, či nie sú niektoré možnosti vypísané dvakrát. Prvok kontroly v žiackych riešeniach obvykle absentuje.

2.4. Propedeutika pre pravidlo súčtu – umenie roztriediť

Ak je potrebné vykonať rozbor všetkých možností, najčastejšie sa to deje na základe princípu, ktorý sa nazýva pravidlo súčtu. Jeho podstata spočíva v tom, že všetky konfigurácie sa najprv roztriedia podľa určitého kritéria do navzájom disjunktných podmnožín. Pre celkový počet konfigurácií potom platí, že je súčtom počtov konfigurácií v jednotlivých disjunktných podmnožinách.

Pod propedeutikou pre pravidlo súčtu rozumieme na úrovni základnej školy schopnosť roztriediť prvky danej množiny do navzájom disjunktných podmnožín vzhľadom na určité kritérium. Nemenej dôležitou otázkou je tiež schopnosť nájsť resp. stanoviť kritérium pre triedenie. Tieto komponenty sme si všímali v žiackych riešeniach.

<u>4. ročník, Dichotomické triedenie</u>

Na rodinnej oslave sa stretli bratranci a sesternice: Viera– žiačka 3.ročníka – učí sa anglický jazyk; Karol– žiak 8.ročníka – učí sa anglický jazyk; Pavol– žiak 5.ročníka – učí sa nemecký jazyk; Lýdia– žiačka 4.ročníka – učí sa anglický jazyk; Marek– žiak 9.ročníka – učí sa nemecký jazyk; Richard– žiak 3.ročníka – učí sa nemecký jazyk; Mária – žiačka 7.ročníka – učí sa anglický jazyk; Silvia– žiačka 8.ročníka – učí sa anglický jazyk. Podľa akých vlastností by sme mohli rozdeliť tieto deti do dvoch skupín? Určite je niekoľko rôznych vlastností. Skús ich nájsť, zapísať a potom podľa každej vlastnosti rozdeľ deti do dvoch skupín.

Prvým krokom k „umeniu roztriediť" je, podľa nášho názoru, ovládanie dichotomického triedenia. Tento typ sa vyskytoval v danej úlohe. Zadanie bolo sťažené tým, že kritérium na triedenie mal žiak nájsť sám a následne podľa neho prvky roztriediť. Môžeme konštatovať, že princíp dichotomického triedenia je žiakom zrozumiteľný. Len v jedinom prípade respondent neurobil ani jedno rozdelenie. Najviac nájdených kritérií bolo sedem, najčastejšie žiaci vyslovili a použili dve kritériá.

<u>6. ročník, Uhol</u>

Sú dané veľkosti uhlov: 23°, 37°, 49°, 89°,112°, 90°, 147°, 152°, 176° (30°, 60°, 75°, 112°,132°, 90°, 179°, 1°, 91°). Rozdeľte ich do skupín tak, aby v jednej skupine boli uhly ostré, v druhej pravé a v tretej skupine uhly tupé.

Jednoduchá úloha na trichotomické triedenie. Žiaci princíp triedenia podľa určitej vlastnosti do navzájom disjunktných množín ovládajú bez problémov. Väčšina riešení bola bez chýb.

2.5. Kedy sú dva objekty „rovnaké“?

Pedagogické skúsenosti ukazujú, že to, čo je „rovnaké“ v matematickom zmysle, nemusí byť častokrát chápané ako „rovnaké“ v bežnom živote (a naopak), a teda aj v myslení žiaka. Pri analýze žiackych riešení sme sústredili pozornosť na to, ako sa tento problém prejavuje pri riešení úloh z kombinatoriky. Či riešiteľ vylučuje „rovnaké“ konfigurácie hneď pri riešení, alebo sa tak deje až vo fáze kontroly.

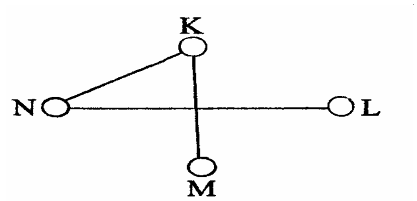
<u>6. ročník, Objem priestorových útvarov</u>
Objem kvádra je 24(30) cm^3. Veľkosti jeho hrán sa dajú vyjadriť celými číslami. Určte ich. Nájdite všetky možnosti.
Niektorí žiaci uvádzali v riešení ako dva rôzne kvádre napr. kvádre s veľkosťami hrán 15-2-1 a 1-2-15. Nesprávne rozlišovali, kedy sú dva geometrické objekty zhodné a kedy sú rôzne.

<u>6. ročník, Siete telies</u>
Sieť kocky sa skladá zo šiestich zhodných štvorcov. Nakresli čo najviac rôznych sietí kocky. Daj pozor na to, aby to naozaj boli siete kocky (ak by si ktorúkoľvek z nich vystrihol, musí sa dať kocka do takejto siete „pekne zabaliť“).
V žiackych riešeniach sa vyskytovali aj rovnaké siete, nakreslené v inej polohe (otočení). To poukazuje na nedostatky v priestorovej predstavivosti a v analýze situácie, kedy sú dva objekty rovnaké resp. rôzne.

2.6. Grafické znázornenie

Úlohy z kombinatoriky patria, podľa nášho názoru, do tej kategórie matematických úloh, v ktorých grafické znázornenie situácie zohráva významnú úlohu v procese riešenia. V žiackych riešeniach sme si všímali, nakoľko žiaci používajú grafické znázornenie, v akej fáze riešenia ho používajú, či je pre nich východiskovým bodom riešenia, doplňujúcim faktorom alebo len ilustráciou.

<u>6. ročník, Teória grafov</u>
Medzi štyrmi mestami K, L, M, N je potrebné urobiť tri prepojenia telefónnymi káblami tak, aby sa z každého mesta dalo telefonovať do všetkých ostatných (ak sa dá telefonovať z K do L, z L do M, možno telefonovať aj z K do M). Jedno z riešení je na obrázku. Nájdite ostatné možnosti a nakreslite ich.



Elementárna úloha z teórie grafov. Grafické znázornenie je tu východiskom a súčasne výsledkom riešenia. Polovica žiakov postupovala pri riešení správne, avšak nenašli všetky riešenia. Vo štvrtine riešení respondenti použili v grafe viac hrán (štyri), ako určovalo zadanie.

6. ročník, Siete telies

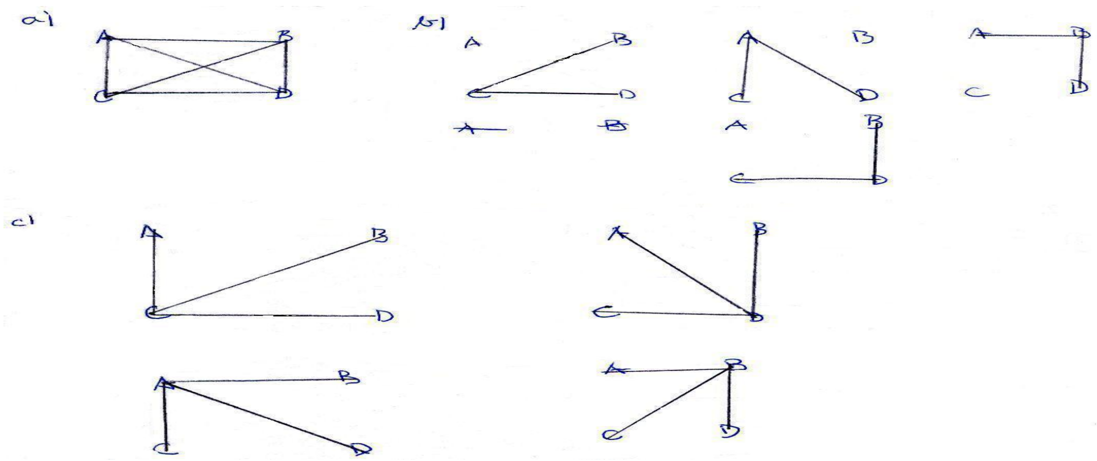
Sieť kocky sa skladá zo šiestich rovnakých štvorcov. Nakresli čo najviac rôznych sietí kocky. Daj pozor na to, aby to naozaj boli siete kocky (ak by si ktorúkoľvek z nich vystrihol, musí sa dať kocka do takejto siete „pekne zabaliť“).

Úloha spájajúca v sebe elementy geometrie (priestorová predstavivosť) a tiež kombinatoriky. Grafické znázornenie bolo aj tu východiskom a súčasne výsledkom riešenia. Najčastejšie sa vyskytovali siete, ktoré mali štyri štvorce v páse, veľmi zriedkavo siete s tromi štvorcami v páse. Ani jeden žiak nenašiel všetky riešenia, najvyšší počet rôznych nájdených sietí bol sedem. Takmer polovica respondentov uviedla aj také vyobrazenia, ktoré neboli sieťami kocky.

6. ročník, Teória grafov

Štyria bývalí spolužiaci (označme ich A, B, C, D) sa dohodli, že si budú dopisovať. Znázornite graficky (pomocou bodov a úsečiek) nasledujúce situácie: a) každý si písal práve s jedným, b) každý si písal práve s dvoma, c) každý si písal práve s troma.

Úloha, v ktorej sa grafická matematizácia reálnej situácie spája s aplikáciou elementov z teórie grafov. Takmer polovica žiakov nakreslila správne grafické znázornenie, a teda zvládla riešenie tejto úlohy. Najlepšie graficky znázornili žiaci situáciu po a) 15-ti z 19, následne situáciu po b) 10-ti z 19 a nakoniec situáciu po c) 9-ti z 19. Vyskytli sa však aj riešenia, kedy žiak nesprávne matematizoval reálnu situáciu a zvolil neadekvátne grafické znázornenie, napr.



2.7. Divergentné úlohy – rozvoj divergentného myslenia

Podľa M. Cirjaka (2000) poznávacie procesy môžeme rozdeliť na konvergentné a divergentné. Pri konvergentných myšlienkových procesoch sa z daných predpokladov smeruje k jedinému správnemu záveru. Divergentné myšlienkové procesy sú také, kde myslenie je zamerané do šírky, diverguje, t.j. produkuje rozličné nápady, alternatívy, hypotézy. Každé divergentné myslenie je tvorivé. Z hľadiska psychických procesov žiaka riešenie divergentných úloh vyžaduje:

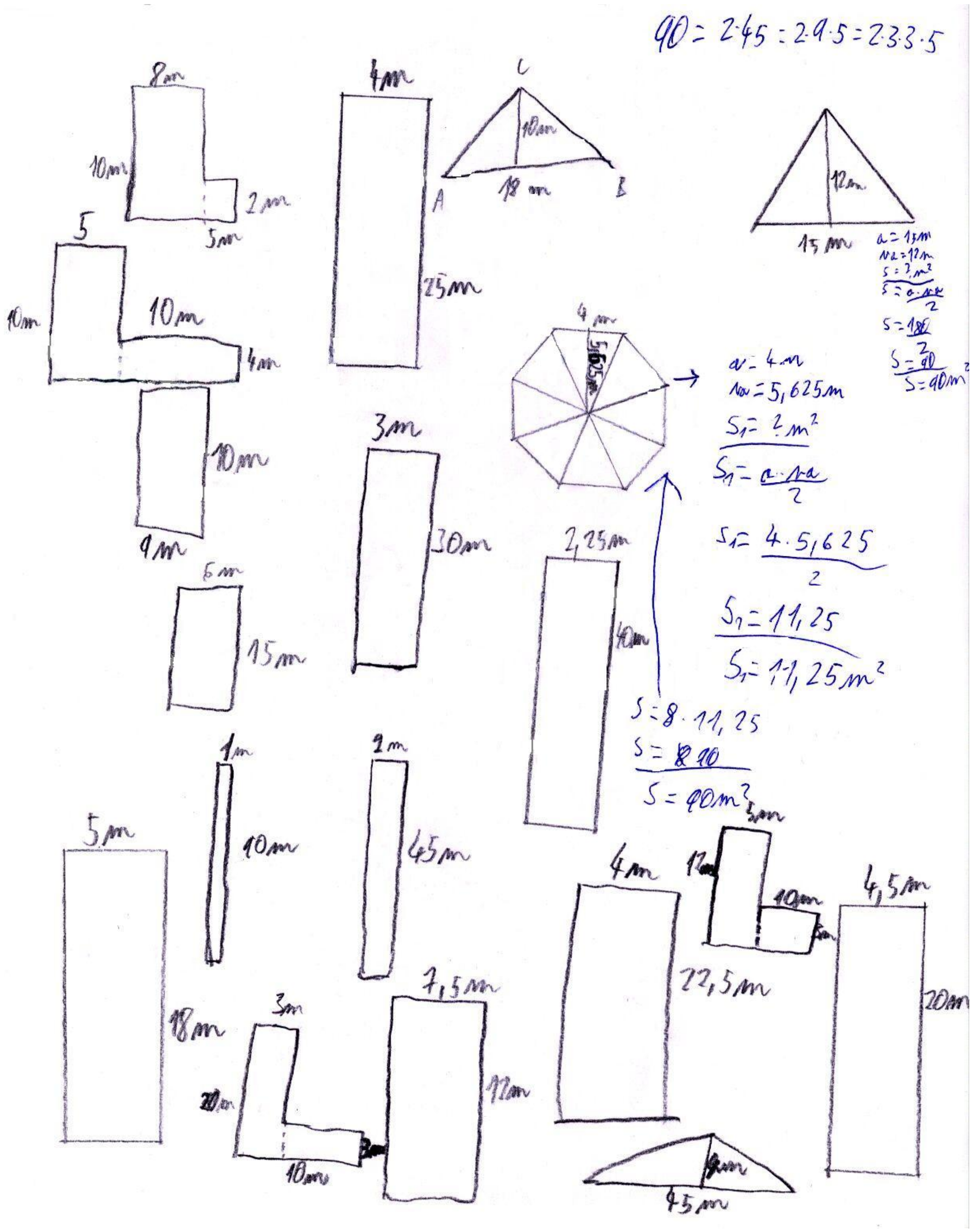
- hľadanie, skúmanie, objavovanie, t.j. aktívnu poznávaciu činnosť;
- schopnosť pretvárať osvojenú skúsenosť;
- vytváranie nových stratégií a metód riešenia;
- invenciu subjektu, uplatnenie tvorivých myšlienkových schopností.

Vzhľadom na uvedené skutočnosti sme do pracovných listov zaradili aj také úlohy z kombinatoriky, ktoré mali divergentný charakter. Pri ich analýze sme pozorovali, ako žiaci pristupujú k ich riešeniu a aké výsledky dosahujú.

6. ročník, Obsah rovinných útvarov

Chceme vysadiť kvetinový záhon s výmerou 90 m^2 (resp. 100 m^2). Ty si záhradný architekt a máš navrhnúť jeho tvar. Skús načrtnúť, ako by mohol kvetinový záhon vyzerať, nezabudni na jeho výmeru. Do obrázka vpíš rozmery. Vymysli čo najviac vhodných návrhov.

Geometrická divergentná úloha s elementami kombinatoriky. Podľa nášho názoru, je možné zaradiť ju do kategórie úloh na tvorivosť tretieho stupňa, typ RP – OP – OP (uzavreté zadanie úlohy – otvorený proces – otvorený produkt). Pri riešení je potrebné skĺbiť teoretické vedomosti o obsahoch rovinných útvarov, rovinnú predstavivosť, divergentné a kombinatorické myslenie. Žiacke riešenia ukázali, že vo väčšine prípadov spojenie vyššie spomínaných faktorov určite nastalo. Znázornený bol veľký počet rôznorodých rovinných útvarov. Okrem tradičných obdĺžnikov s rôznymi rozmermi sa často vyskytovali rovnoramenné trojuholníky, lichobežníky a rovnobežníky. Ďalej to boli zložené útvary z obdĺžnikov, štvorcov, trojuholníkov a osobitne také, ktoré boli určite inšpirované sieťami kocky. V jednom riešení sa objavil pravidelný osemuholník.



6. ročník, Desatinné čísla

Máme k dispozícii tri desatinné čísla: 2,34; 5,7; 13,56 (3,14; 8,5; 12,37) a štyri znamienka: +, -, ., : . Vytvorte rôzne úlohy, v ktorých použijete dané desatinné čísla a dané znamienka (každé číslo a každé znamienko môžete v jednej úlohe použiť najviac raz). Vypočítajte.

Opäť divergentná úloha s kombinatorickými prvkami. Žiaci vytvárali zadania z dvoch aj troch čísel. Len v jedinom riešení sa vyskytlo zadania, ktoré začínalo záporným číslom.

$3{,}14 + 8{,}5 = 11{,}19$

$3{,}14 + (-8{,}5) = -5{,}9$

$-3{,}14 \cdot 8{,}5 = -23{,}690$

$12{,}37 + 8{,}5 \cdot (-3{,}14) = 12{,}37 + (-340) =$

$12{,}37 - 340 = -(340 - 12{,}37) = -197{,}63$

$8{,}5 \cdot 12{,}34 = 104{,}845$

$-12{,}37 + 8{,}5 = -4{,}32$

$-8{,}5 + 12{,}37 = 4{,}32$

7. ročník, Výrazy

Môžeš použiť jednočleny: ***-9a*****,** ***6b*****, -3 (*****-8x*****,** ***4y*****, -2)***; dvojčleny:* ***18b – 12a*****,** ***-15a + 9 (16y – 12x*****, -*****24x*** **+ 6)***; symboly: +, -,* **.***,* **:***,* **()***. Vytvor z nich čo najviac rôznych výrazov. Ak vieš, uprav ich (napr. sčítaj, odčítaj, vynásob, vydeľ, vynímaj pred zátvorku).*

Opäť divergentná úloha kombinatorického charakteru, ktorá overuje vyšší stupeň tvorivosti žiakov - vytváranie úlohy. Často sa vyskytlo nerešpektovanie dvojčlena pri jeho vstupe do výrazu a nerešpektovanie znamienka mínus u jednočlena. V dvoch prípadoch sa objavila snaha o systematické zostavovanie výrazov. Napr.

$-9a + (18b - 12a) = -21a + 18b$

$-9a - (18b - 12a) = 3a - 18b$

$-9a \cdot (18b - 12a) = -$

$-9a : (18b - 12a) =$

$-9a + 18b - 12a =$

$-9a - 18b - 12a =$

$-9a \cdot 18b - 12a =$

$-9a : 18b - 12a =$

$-9a + (-15a + 9) =$

$-9a - (-15a + 9) =$

$-9a \cdot (-15a + 9) =$

$-9a : (-15a + 9) =$

$-9a + 6b =$

$-9a - 6b =$

$-9a \cdot 6b =$

$-9a : 6b =$

$-9a + (-3) =$

$-9a - (-3) =$

$-9a \cdot (-3) =$

$-9a : (-3) =$

$6b + (18b - 12a) =$

$6b - (18b - 12a) =$

$6b : (18b - 12a) =$

$6b + 18b - 12a =$

$6b - 18b - 12a =$

$6b \cdot 18b - 12a =$

$6b : 18b - 12a =$

$6b + (-15a + 9) =$

$6b - (-15a + 9) =$

$6b \cdot (-15a + 9) =$

$6b : (-15a + 9) =$

$6b + (-3) =$

$6b - (-3) =$

$6b \cdot (-3) =$

$6b : (-3) =$

$-3 + (18b - 12a) =$

$-3 - (18b - 12a) =$

$-3 \cdot (18b - 12a) =$

$-3 : (18b - 12a) =$

$-3 + 18b - 12a =$

$-3 - 18b - 12a =$

$-3 \cdot 18b - 12a =$

$-3 : 18b - 12a =$

$-3 + (-15a + 9) =$

$-3 - (-15a + 9) =$

$-3 \cdot (-15a + 9) =$

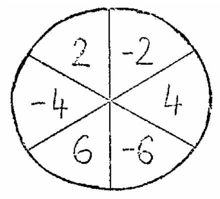
$-3 : (-15a + 9) =$

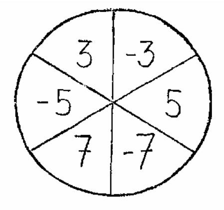
$18b - 12a + (-15a + 9) =$

2.8. Usporiadané versus neusporiadané konfigurácie

V priebehu dlhoročnej pedagogickej praxe sme nadobudli skúsenosť, že pre žiakov sú jednoduchšie tie úlohy, v ktorých je potrebné vytvárať usporiadané konfigurácie, ako tie, v ktorých sú konfigurácie neusporiadané. Preto sme medzi elementy riešenia úloh z kombinatoriky zaradili aj tento element. Či sa nám poznatok z praxe potvrdí, to sme si všímali pri analýze žiackych riešení.

6. ročník, Celé čísla
Koľkými spôsobmi možno nahrať 4 body (5 bodov) s tromi šípkami na tomto nezvyklom terči? Každá šípka musí skončiť v niektorom výseku (v jednom smie skončiť aj viac šípok) a všetky musia bodovať. Na poradí zásahov nezáleží.





Napriek tomu, že v zadaní bolo zdôraznené, že na poradí zásahov nezáleží, v dvoch tretinách riešení sa vyskytli rovnaké možnosti, len s vymeneným poradím prvkov. Opäť sa potvrdila skutočnosť, že žiaci sú v prvom rade „nastavení" na vytváranie usporiadaných konfigurácií. Bolo by preto potrebné venovať zvýšenú pozornosť riešeniu takých úloh, v ktorých sa vytvárajú neusporiadané konfigurácie.

6. ročník, Objem priestorových útvarov
Objem kvádra je 24(30) cm^3. Veľkosti jeho hrán sa dajú vyjadriť celými číslami. Určte ich. Nájdite všetky možnosti.
Pätina žiakov vo svojich riešeniach nesprávne vytvárala usporiadané konfigurácie namiesto neusporiadaných. Teda kvádre s veľkosťami hrán napr. 15-2-1 a 1-2-15 chápala ako dva rôzne.

6. ročník, Deliteľnosť prirodzených čísel
Je dané číslo 407 (609). Zameňte poradie číslic tak, aby nové číslo bolo deliteľné: a) dvoma, b) piatimi.
Potvrdil sa nám opäť predpoklad, že vytváranie usporiadaných konfigurácií nie je pre žiakov problematické. Viac ako polovica riešení bola správna.

2.9. Prvky v objektoch – najviac raz, práve raz, alebo aj viackrát?

Opäť z pedagogickej praxe máme skúsenosť, že pre žiakov i študentov býva často komplikovaným problémom, koľkokrát sa jednotlivé prvky môžu, resp. musia začleniť do vytváraných konfigurácií. Preto sa aj takýto element nachádza v našej analýze. Ako sa s týmto problémom vysporiadali respondenti pedagogického experimentu, to bolo predmetom analýzy v tejto časti.

6. ročník, Numerácia
Vytvorte všetky trojciferné čísla z číslic 1, 2, 7, 0 (3, 4, 8, 0).
Zadanie úlohy umožňovalo vytvárať čísla dvoma spôsobmi: 1. každá číslica sa vo vytváranej konfigurácii bude vyskytovať najviac raz; 2. jednotlivé číslice sa vo vytváraných konfiguráciách môžu nachádzať ľubovoľnekrát (najviac trikrát). 90% žiakov vytváralo čísla bez opakovania číslic, evidentne je tento spôsob pre žiakov, na základe ich predchádzajúcich

skúseností, prirodzenejší. Len jediný respondent uvažoval nad tým, že je možné riešiť úlohu z dvoch pohľadov. Pri riešení takto nejednoznačne zadanej úlohy je, podľa nášho názoru, vhodné upozorniť žiakov na to, že existujú aj takéto úlohy, kde zadania a následne riešenia nemusia byť jednoznačné. Vtedy je dobré viesť riešenie aj viacerými smermi, ktoré ponúka zadanie.

6. ročník, Zlomky
Z číslic 0, 2, 5 (0, 3, 7) vytvorte všetky zlomky, ktoré dokážete. Zistite, či sú medzi vytvorenými zlomkami také, ktoré sa rovnajú. Ak áno, vytvorené zlomky roztrieďte do skupín podľa veľkosti.
Len niekoľkí žiaci pochopili zadanie tak, že vo vytváraných zlomkoch použili každú číslicu najviac raz a čitateľ aj menovateľ boli jednociferné čísla. Väčšina vytvárala zlomky aj s dvojciferným čitateľom resp. menovateľom, niektorí aj s opakovaním číslic. Žiacke riešenia demonštrovali obdivuhodne tvorivý prístup v danej úlohe, prevýšili naše očakávania. Takto formulovaná úloha by mohla byť, podľa nášho názoru, vhodným objektom na sprístupnenie daného elementu, objavujúceho sa v riešeniach úloh z kombinatoriky.

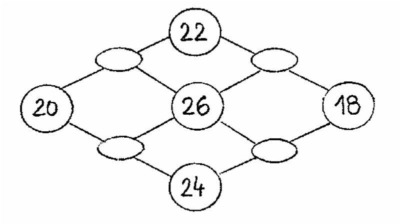
7. ročník, Kombinatorika
Linda mala v škatuľke červené, zelené a žlté cukríky – lentilky. Z každej farby boli viac ako tri. Siahla do škatuľky a vybrala postupne tri kusy. Zapíšte všetky možné poradia, v akých mohla tri lentilky vybrať zo škatuľky.
7. ročník, Kombinatorika
Na hodine matematiky odpovedali traja žiaci: Ivana, Janko a Karol. Nikto z nich nedostal horšiu známku ako 3. Napíšte všetky možné trojice známok, ktoré žiaci mohli dostať. Koľko je takýchto trojíc?
Analýza riešení týchto úloh potvrdila naše predpoklady, že v situácii, kedy sa majú vytvárať konfigurácie s možným opakovaním prvkov, žiaci sú pri nich oveľa menej úspešní ako v prípadoch, kedy sú vytvárané konfigurácie bez opakovania prvkov. Úspešnosť klesá troj- až štvornásobne. Polovica respondentov si ani neuvedomila, že sa jednotlivé prvky v konfiguráciách môžu vyskytovať aj viackrát.

2.10. Organizácia a systém

Tak ako v celej matematike, aj pri riešení kombinatorických úloh je dôležité nájsť organizačný princíp, prostredníctvom ktorého sa nájde a usporiada daná množina. Nájdenie alebo nenájdenie organizačného princípu a vytvorenie si systému v riešení je, vo väčšine prípadov, rozhodujúce pre úspešnosť riešenia úlohy.
Ako sa žiakom darilo, resp. nedarilo objaviť v jednotlivých úlohách organizačný princíp, to sme si všímali pri analýze ich riešení.

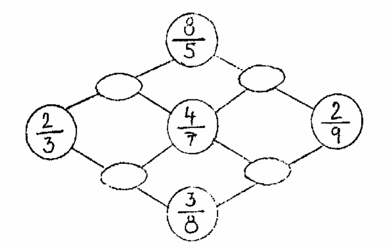
6. ročník, Numerácia
Vytvorte všetky trojciferné čísla z číslic 1, 2, 7, 0 (3, 4, 8, 0).
Analýza žiackych riešení ukázala, že nevytvorenie si systému v riešení bolo jednoznačne príčinou toho, že respondenti neboli úspešní, t.j. nenašli všetky hľadané čísla.

6. ročník, Celé čísla, Teória grafov
Začni kruhom celkom naľavo a postupuj len doprava po čiarach až do kruhu celkom napravo a sčítavaj pritom čísla a prázdne ovály, cez ktoré ideš. Každý ovál má hodnotu –13. Aká je najmenšia a najväčšia hodnota, ktorú možno dostať? Koľko rôznych „ciest“ si absolvoval?



7. ročník, Zlomky, Teória grafov

Začni kruhom celkom naľavo a postupuj len doprava po čiarach až do kruhu celkom napravo a sčítavaj pritom zlomky a prázdne ovály, cez ktoré ideš. Každý ovál má hodnotu $-\frac{3}{5}$*. Aká je najmenšia a najväčšia hodnota, ktorú možno dostať? Koľko rôznych „ciest“ si absolvoval?*



Dve podobné úlohy, ktorá propedeuticky smerujú do teórie grafov. To, že v 6. ročníku sa len v jedinom prípade respondentovi podarilo určiť správny počet ciest a v 7. ročníku žiadnemu, je dôsledok absencie systematického postupu pri vytváraní ciest po hranách grafu.

2.11. Interpretácia výsledku

Zo skúseností vieme, že žiak často vypočíta matematickú úlohu, podčiarkne výsledok, ale nevie odpovedať na otázku, čo to vlastne vypočítal.
Všímali sme si, ako sa v žiackych riešeniach objavovala interpretácia výsledku. Snažili sme sa analyzovať, či prípadná absencia interpretácie výsledku je spôsobená žiakovou nepozornosťou (prípadne „nepotrebou“ interpretovať výsledok), alebo je to nedostatok vhľadu do situácie, čo poukazuje na prítomnosť formalizmu v matematickom poznaní žiaka.

6. ročník, Deliteľnosť prirodzených čísel

Je dané číslo 407 (609). Zameňte poradie číslic tak, aby nové číslo bolo deliteľné: a) dvoma, b) piatim.

Jedna z mála úloh, v ktorých sa žiaci neuspokojili len s nájdením všetkých vhodných možností, ale cítili potrebu overiť si svoj výsledok. Tretina žiakov vykonala aj kontrolu vypísaných konfigurácií prostredníctvom delenia. To poukazuje aj na fakt, že poznatky o deliteľnosti prirodzených čísel asi neboli dostatočne utvrdené, respondenti potrebovali „skúšku správnosti“.

6. ročník, Obvod rovinných útvarov

Dĺžky strán rovnoramenného trojuholníka sú vyjadrené celými číslami. Jeho obvod je 21 (24) cm. Určte dĺžky strán všetkých rovnoramenných trojuholníkov, ktoré vyhovujú daným podmienkam. Odôvodnite svoj postup riešenia.

V tejto úlohe sme od žiakov žiadali, aby odôvodnili svoj postup riešenia. Chceli sme zistiť, či dokážu správne interpretovať výsledok. Snaha o zdôvodnenie sa objavila vo viac ako polovici riešení, 7 z 19 uviedli trojuholníkovú nerovnosť ako východisko pre riešenie.

6. ročník, Obsah rovinných útvarov

Chceme vysadiť kvetinový záhon s výmerou 90 m^2 (resp. 100 m^2). Ty si záhradný architekt a máš navrhnúť jeho tvar. Skús načrtnúť, ako by mohol kvetinový záhon vyzerať, nezabudni na jeho výmeru. Do obrázka vpíš rozmery. Vymysli čo najviac vhodných návrhov.

Dôležitým krokom v niektorých riešeniach bola sebakontrola. Ak bol vytvorený útvar zložitejší, a teda jeho obsah nebol zrejmý na prvý pohľad, žiaci robili kontrolu svojho návrhu dôsledným výpočtom obsahu daného útvaru. Snažili sa teda o dôslednú interpretáciu výsledku.

2.12. Vytvorenie úlohy

V priebehu vyučovania matematiky sa žiakovi, v drvivej väčšine prípadov, predkladajú na riešenie úlohy, ktoré vytvoril niekto iný a žiak ich má vyriešiť. Táto skutočnosť môže byť pre neho značne demotivujúca. Len málokedy má žiak možnosť sám vytvoriť úlohu. Proces tvorby matematickej úlohy mu teda zostáva utajený. Aspoň čiastočne sme sa pokúsili ponúknuť žiakom aj také podklady, aby sami zostavili jednoduché úlohy, pri tvorbe ktorých by uplatnili kombinatorický prístup.

M. Zelina (1990) na základe kombinácie možností podielu tvorivosti obsahu a potencionality úloh, vzhľadom na otvorenosť a uzavretosť procesov a ich výsledkov, vytvoril taxonómiu tvorivých úloh v matematike. Definoval štyri stupne tvorivosti.

Ak v našich pracovných listoch žiak vytváral úlohu sám, ide teda o relatívnu otvorenosť pri zadaní úlohy, variabilitu pri použitých procesoch riešenia a otvorenosť výstupov, potom takýto proces zodpovedá tvorivosti tretieho alebo aj štvrtého stupňa tvorivosti. Takéto úlohy, aj z kombinatoriky, by žiak mohol vo svojom matematickom vzdelávaní stretnúť a riešiť ich. Ako sa respondentom darilo vytvárať úlohy, ukáže nasledujúca analýza.

6. ročník, Celé čísla

Zapíš a ak vieš, tak vypočítaj, všetky súčty, rozdiely, súčiny a podiely z čísel –2 a 4 (-3 a 6).

Úlohy, s ktorými sa žiak obvykle vo vyučovaní stretáva, vytvoril niekto iný a na ňom zostáva ich riešenie. V tejto netypickej úlohe k téme *Celé čísla*, má žiak sám vytvoriť zadanie úlohy, a až potom ju vypočítať. Navyše sa tu uplatňuje kombinatorický princíp pri vytváraní jednotlivých zadaní úloh. Polovica žiakov vytvorila všetky zadania, ale dopustili sa chyby vo výpočte. Aj pri takejto pomerne jednoduchej úlohe sa ukázalo, že proces tvorby úlohy nie je všetkým žiakom vlastný. Bolo by potrebné, podľa nášho názoru, zaraďovať do vyučovania matematiky aj takýto typ úloh, napríklad aj z kombinatoriky.

6. ročník, Desatinné čísla

Máme k dispozícii tri desatinné čísla: 2,34; 5,7; 13,56 (3,14; 8,5; 12,37) a štyri znamienka: +, -, ., : . Vytvorte rôzne úlohy, v ktorých použijete dané desatinné čísla a dané znamienka (každé číslo a každé znamienko môžete v jednej úlohe použiť najviac raz). Vypočítajte.

Analýza riešení ukázala, že pri riešení úlohy tohto typu sú medzi jednotlivými žiakmi veľké rozdiely. Niektorí vytvorili naozaj veľký počet rôznych zadaní. Našli sa však aj takí, pre ktorých bolo problémom vytvoriť aj päť rôznych zadaní. Ak by sa do vyučovania zaradili také cvičenia, v ktorých je potrebné vytvárať zadanie úlohy, potom by bolo potrebné, podľa nášho názoru, voliť individuálny prístup k jednotlivým žiakom.

7. ročník, Zlomky

Sú dané zlomky $\frac{3}{4}$ *a* $-\frac{5}{2}$. *Vytvorte všetky súčty, rozdiely, súčiny a podiely z týchto dvoch zlomkov.*

Takto formulovaná úloha, kde žiak má vlastne sám vytvoriť zadanie pre výpočet, ukázala sa ako pomerne náročná. Len 3 z 20 riešení boli úplné a správne. Takmer polovica riešení obsahovala vytvorenie zadania len v tom poradí zlomkov, ako boli uvedené. Žiaci si neuvedomili, že je možné vytvoriť súčet, rozdiel, súčin a podiel aj zámenou poradia. To poukazuje, podľa nášho názoru na nedostatky v kombinačnom myslení.

3. Záver

Ako ťažká, ba priam neschodná, javí sa nám cesta zaradiť do prehustených osnov ďalší tematický celok s novými pojmami a vzťahmi. Zákonite vzniká otázka, čo potom vynechať, aby sme mohli ponúknuť niečo iné. Tento „revolučný“ spôsob sa zvyčajne nestretáva s priaznivým ohlasom. Naopak, prikláňame sa k „evolučnej“ ceste prenikania kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole. K akejsi nenápadnej „infiltrácii“ do vyučovacieho procesu.

Prezentované kombinatorické úlohy nevyžadujú takmer žiadne zavedenie nových pojmov a vzťahov. Dajú sa použiť pri jednotlivých témach matematického učiva bez vysvetľovania ich zadania a poskytovania ďalších inštrukcií pre žiakov. Žiaci by si mohli pri ich riešení prirodzenou cestou osvojiť jednoduché postupy a propedeutiku metód, používaných v kombinatorike (ale aj v teórii grafov). Na mnohé z nich by mohli prísť samostatne, pri niektorých by možno bola potrebná koordinácia rôznych žiackych postupov zo strany učiteľa. Úlohy sú vhodné na samostatnú alebo aj skupinovú prácu. V závislosti od úrovne triedy, niekde môže byť potrebné usmernenie zo strany učiteľa. Naša predstava je, že vytvorené úlohy by mohli byť do vyučovacieho procesu zaraďované ako integrálna súčasť pri tej-ktorej téme. Nemali by byť vnímané ako niečo neobvyklé, neštandardné, alebo dokonca ťažké. Predpokladá to, samozrejme, dobrú prípravu zo strany učiteľa po stránke odbornej a hlavne metodickej.

Pedagogický experiment, realizovaný v prirodzených podmienkach vyučovania matematiky na základnej škole ukázal, že prostredníctvom vhodne vytvorených skupín úloh je možné efektívne zaradiť do vyučovacieho procesu elementárne kombinatorické úlohy. Takúto „evolučnú” cestu zaraďovania elementov modernej matematiky do vyučovania považujeme za schodnejšiu, ako začleňovať do prehustených učebných osnov nové tematické celky.

Kombinatorické úlohy, vzhľadom na nealgoritmický charakter riešenia mnohých z nich, sú tiež jedným z identifikačných nástrojov na vyhľadávanie žiakov nadaných na matematiku (podľa Prídavkovej, A. – Švedu, D., 1999).

Navrhnutý spôsob zaraďovania elementov modernej matematiky do vyučovania na základnej škole určite nie je jediný možný. Je to len jedna z ciest, ktorá by mohla prispieť k zatraktívneniu matematiky a jej výučby na základnej škole. Je to tiež cesta, ktorá by možno mohla viesť aj k zvyšovaniu matematickej gramotnosti našich žiakov.

Literatúra

[1] CIRJAK, M. *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (tvorivosť v matematike).* Prešov: ESSOX, 2000. ISBN 80-968369-0-0.

[2] PRÍDAVKOVÁ, A. – ŠVEDA, D. Výber žiakov 4. ročníka ZŠ do tried s rozšíreným vyučovaním matematiky. In *MFI ve škole, 1999-2000, č. 9.* s. 524-532. ISSN 1210-1761.

[3] SCHOLTZOVÁ, I. Integrácia kombinatoriky do vyučovania matematiky na základnej škole. In *Acta Facultatis Paedagogicae Universitatis Tyrnaviensis, Ser. C, 2002, no. 6. pp.189-198.* Trnava: Trnavská univerzita, Pedagogická fakulta, 2002. ISBN 80-89074-51-0.

[4] SCHOLTZOVÁ, I. *Integrácia diskrétnej matematiky do školskej matematiky.* Dizertačná práca. Košice: Prírodovedecká fakulta UPJŠ, 2003.

[5] ZELINA, M. *Tvorivosť v matematike.* Bratislava: KPÚ, 1990. ISBN 80-85158-34-2.