ZOBRAZENIA ZACHOVÁVAJÚCE VZDIALENOSŤ

Martin Billich

Katedra matematiky a fyziky, Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita
Námestie A. Hlinku 56/1, 034 01 Ružomberok, SR
e-mail: Martin.Billich@fedu.ku.sk

Abstract: In the present paper, some properties for a unit distance preserving mapping between Euclidean spaces with dimension one or between normed vector spaces are discussed. In particular, mappings which preserve distances are considered.
Key words: Normed vector spaces , distance-preserving mappings, isometry.

1. Úvod

Prvé dôležité výsledky, ktoré charakterizujú izometrie medzi dvomi reálnymi vektorovými priestormi, pochádzajú od S. Mazura a S. Ulama z roku 1932. Títo autori dokázali, že každá izometria jedného normovaného reálneho vektorového priestoru na druhý je afinné zobrazenie (viď [2], str. 44).

V tomto článku budeme študovať namiesto izometrií zobrazenia, ktoré spĺňajú dodatočné vlastnosti (DOPP), resp. (SDOPP). Ukážeme, že takéto zobrazenia nemajú ďaleko k tomu, aby boli izometrie.

2. Izometrické zobrazenia

Nech V je vektorový priestor nad poľom R reálnych čísel a $\varphi : V \to R$ je zobrazenie spĺňajúce nasledujúce vlastnosti

(i) $\forall x \in V: \quad \varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) $\forall x \in V, \lambda \in R: \quad \varphi(\lambda x) = |\lambda| . \varphi(x)$

(iii) $\forall x, y, z \in V: \quad \varphi(x + y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$

Potom (V, φ) nazývame *reálny normovaný vektorový priestor*. Obvykle namiesto $\varphi(x)$ píšeme $\| x \|$ a hovoríme, že reálne číslo $\| x \|$ je norma prvku $x \in V$. Vzdialenosť $d(x, y)$ prvkov $x, y \in V$ je definovaná vzťahom $d(x, y) = \| x - y \|$.

Nech X, Y sú dva normované reálne vektorové priestory. Zobrazenie $f : X \to Y$ (X na Y) definuje *izometriu*, ak pre ľubovoľné dva prvky $x, y \in X$ platí

$$\| f(x) - f(y) \| \quad = \quad \| x - y \|$$

Vzdialenosť $\rho > 0$ sa nazýva *kontraktívna* (nezväčšujúca, resp. ohraničená zhora) vzhľadom na zobrazenie $f : X \to Y$, ak platí: $\| x - y \| = \rho \quad \Rightarrow \quad \| f(x) - f(y) \| \le \rho$. Podobne, vzdialenosť ρ sa nazýva *extenzívna* (nezmenšujúca, resp. ohraničená zdola) vzhľadom na zobrazenie *f*, ak platí nerovnosť $\| f(x) - f(y) \| \ge \rho$ pre všetky $x, y \in X$ pre ktoré je $\| x - y \| = \rho$. Hovoríme, že nezáporné číslo ρ je *konzervatívnou* (zachovávajúcou sa) vzdialenosťou vzhľadom na dané zobrazenie f práve vtedy, keď pre všetky $x, y \in X$ platí

$$\| x - y \| = \rho \quad \Rightarrow \quad \| f(x) - f(y) \| = \rho$$

t.j. ρ je súčasne kontraktívna aj extenzívna vzdialenosť. Ak f je izometrické zobrazenie, potom každá vzdialenosť $\rho > 0$ je konzervatívna vzhľadom na toto zobrazenie, a naopak. Na tomto mieste si možno položiť otázku: „ Je zobrazenie zachovávajúce nejakú vzdialenosť už izometria ? “.

V roku 1970 si A.D. Alexandrov položil otázku, či transformácia $f : X \to X$ zachovávajúca vzdialenosť $\rho > 0$ je izometria, čo je známe ako *problém Alexandrova*. V prípade, keď X je normovaný vektorový priestor, možno bez ujmy na všeobecnosti položiť $\rho = 1$ (pozri [7]).

Skôr ako Alexandrov, tento problém riešili F. S. Beckman a D. A. Quarles [1], pre prípad konečno-rozmerného euklidovského priestoru $X = R^n$. Ich výsledok je uvedený v nasledujúcej vete.

Veta 1. *Nech* $k > 0$ *je pevné reálne číslo a* $f : R^n \to R^n$ $(n \in \mathrm{N} \setminus \{1\})$ *je zobrazenie, pre ktoré platí*

$$\forall x, y \in R^n : \ \| x - y \| = k \ \Rightarrow \ \| f(x) - f(y) \| = k .$$

Potom f je zhodná (izometrická) transformácia priestoru R^n, *t.j. existuje ortogonálna matica*

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \ldots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \ldots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

a ďalej reálna matica $a = (a_1, \ldots, a_n)$, *pričom pre všetky* $x \in R^n$ *platí*

$$f(x) = xQ + a .$$

Táto veta neplatí pre prípad R^1 (euklidovskej priamky), ako aj pre R^∞ (kontrapríklady sú uvedené v [5], [6]).

3. Zobrazenia zachovávajúce jednotkovú vzdialenosť

Dva normované reálne vektorové priestory X a Y sú izometrické, ak existuje izometria X na Y. Mazur a Ulam dokázali, že každá izometria f jedného normovaného reálneho vektorového priestoru na druhý je nutne afinné zobrazenie, t.j. zobrazenie $x \to f(x) - f(0)$ je lineárne.

Uvažujme nasledujúce podmienky pre zobrazenie $f : X \to Y$ (viď [5], [8]).

(DOPP) $\quad \forall x, y \in X : \ \| x - y \| = 1 \ \Rightarrow \ \| f(x) - f(y) \| = 1$

(SDOPP) $\quad \forall x, y \in X : \ \| x - y \| = 1 \ \Leftrightarrow \ \| f(x) - f(y) \| = 1$

Rassias a Šemrl [8] pomocou definície (SDOPP) – Strong Distance One Preserving Property, dokázali nasledujúcu vetu.

Veta 2. *Dané sú dva reálne normované vektorové priestory X a Y, z ktorých aspoň jeden má dimenziu väčšiu ako jedna. Ďalej nech* $f : X \to Y$ *je surjektívne zobrazenie spĺňajuce* (SDOPP). *Potom f je injektívne zobrazenie, pre ktoré platí*

$$\forall x, y \in X : \ | \, \| f(x) - f(y) \| - \| x - y \| \, | \le 1 \qquad (1)$$

Navyše, zobrazenie f zachováva vzdialenosť n v oboch smeroch pre každé prirodzené číslo n, t.j. platí

$$\forall x, y \in X: \quad \| x-y \| = n \quad \Leftrightarrow \quad \| f(x)-f(y) \| = n .$$

Predpoklad, že jeden z daných priestorov X a Y má dimenziu väčšiu ako jedna nemožno vynechať. Dôkazom toho je, ak budeme uvažovať o funkcii $f: R \to R$ určenej predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{ak } x \text{ je celé číslo} \\ x, & \text{ak } x \text{ nie je celé číslo} \end{cases}$$

Takéto zobrazenie je bijektívne a zároveň zachováva ľubovoľnú vzdialenosť n pre všetky $n \in N$, ale nespĺňa nerovnosť (1) vety 2. Ak jednotková vzdialenosť je kontraktívna vzhľadom na zobrazenie $f: X \to Y$ títo autori dostávajú nasledujúce tvrdenie (viď [8]).

Veta 3. *Nech X a Y sú reálne normované vektorové priestory, pričom jeden z nich má dimenziu väčšiu ako jedna. Ďalej nech $f: X \to Y$ je zobrazenie, pre ktoré platí*

$$\forall x, y \in X: \quad \| f(x)-f(y) \| \le \| x-y \| \tag{2}$$

Naviac predpokladajme, že f je surjektívne zobrazenie spĺňajúce podmienku (SDOPP). *Potom f je izometria.*

Pre špeciálny prípad, keď $X = Y = R$ a $f: R \to R$ je kontraktívne zobrazenie, dokážeme vetu:

Veta 4. *Nech $f: R \to R$ je zobrazenie (kontraktívne), pre ktoré platí*

$$\forall x, y \in X: \quad | f(x)-f(y) | \le | x-y | \tag{3}$$

Ďalej nech zobrazenie f spĺňa podmienku (DOPP). *Potom f je izometria.*

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $f(0)=0$. V opačnom prípade pre ľubovoľné $x \in R$ použijeme substitúciu $f(x)-f(0)$ za $f(x)$. Podľa predpokladu vety, zobrazenie f spĺňa (DOPP), odkiaľ dostaneme

$$| f(1)-f(0) | = | 1-0 | = 1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1 \quad \text{alebo} \quad f(1)=-1 .$$

(a) Nech $f(1)=1$. Pomocou matematickej indukcie najskôr dokážeme, že pre všetky nezáporné celé čísla n platí $f(n)=n$. Indukčný predpoklad bude $f(m)=m$ pre ľubovoľné celé čísla m, pre ktoré $0 \le m < n$ (kde n je celé číslo väčšie ako jedna). Nakoľko platí

$$| f(n)-f(n-1) | = | f(n)-(n-1) | = 1 ,$$

potom $f(n)=n-2$ alebo $f(n)=n$. V prvom prípade, keď $f(n)=n-2$, položme

$$u = \frac{(n-1)+n}{2} .$$

Vieme, že zobrazenie f je kontraktívne (spĺňa (3)), potom platí

$$\frac{1}{2} \ge | f(u)-f(n-1) | \ge | f(n)-f(n-1) | - | f(u)-f(n) | \ge 1 - | u-n | = \frac{1}{2} ,$$

odkiaľ dostaneme $| f(u)-f(n-1) | = 1/2$ a $| f(u)-f(n) | = 1/2$. Podľa indukčného predpokladu je $f(n-1)=n-1$ a $f(n)=n-2$, a teda

$$f(u) = \frac{(n-2)+(n-1)}{2} .$$

Ak teraz položíme

$$v = \frac{(n-2)+(n-1)}{2},$$

tak analogickými úvahami dostaneme

$$|f(v) - f(n-2)| = \frac{1}{2}, \quad |f(v) - f(n-1)| = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad f(v) = \frac{(n-2)+(n-1)}{2}.$$

Pretože $|u - v| = 1$ a $|f(u) - f(v)| = 0$, dostávame spor s predpokladom, že zobrazenie *f* spĺňa (DOPP). Potom pre ľubovoľné nezáporné celé číslo *n* platí $f(n) = n$.

Podobne, $f(-1)$ musí nadobúdať hodnotu –1. V opačnom prípade bude $f(-1) = 1$. Z predpokladu kontraktívnosti zobrazenia f dostaneme (pre $x = -1/2$ a $y = 0$, resp. $y = -1$), že

$$|f(-1/2) - f(0)| = |f(-1/2) - 0| \le |-1/2 - 0| = 1/2,$$

resp.

$$|f(-1/2) - f(-1)| = |f(-1/2) - 1| \le |-1/2 - (-1)| = 1/2,$$

t.j. $f(-1/2) = 1/2$. Rovnako platí $f(1/2) = 1/2$, čo je v spore s tým, že zobrazenie *f* spĺňa podmienku (DOPP). Z predchádzajúceho vidieť, že pomocou matematickej indukcie možno dokázať $f(n) = n$ pre všetky záporné celé čísla *n* rovnako, ako pre nezáporné celé čísla *n*.

Pre každé reálne číslo *x* existuje celé číslo n_0, že $x \in < n_0, n_0 + 1 >$. Nakoľko zobrazenie *f* je kontraktívne, podľa vyššie uvedeného dostaneme

$$|f(x) - f(n_0)| = |x - n_0| \quad \text{a} \quad |f(x) - f(n_0 + 1)| = |x - (n_0 + 1)|.$$

Z tohto, a pomocou už dokázaného, že $f(n) = n$ pre všetky celé čísla, vyplýva, že pre všetky $x \in R$ platí $f(x) = x$, a teda *f* je izometria (identita).

(b) Nech $f(1) = -1$. Položme $g(x) = -f(x)$ pre všetky $x \in R$. Potom zobrazenie *g* spĺňa (DOPP) a súčasne platí nerovnosť (3), t.j.

$$|g(x) - g(y)| = |-(f(x) - f(y))| = |f(x) - f(y)| \le |x - y|.$$

Podľa (a) je zobrazenie *g* izometria, pričom platí $g(x) = x$ pre všetky $x \in R$. Odtiaľ už máme, že aj $f(x)$ je izometria, pričom pre každé reálne číslo *x* platí $f(x) = -x$. □

Ak zobrazenie medzi dvomi reálnymi normovanými vektorovými priestormi bude zachovávať dve navzájom rôzne vzdialenosti namiesto jednej, Benz a Berens [4] dokázali nasledujúce tvrdenie.

Veta 5. *Nech X a Y sú reálne normované vektorové priestory, pričom dimenzia X je väčšia ako jedna a Y je ostro konvexný vektorový priestor. Ďalej nech $f: X \to Y$ je také zobrazenie, že pre všetky $x, y \in X$ platí*

$$\|x - y\| = \rho \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \le \rho$$
$$\|x - y\| = m\rho \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \ge m\rho,$$

kde m je kladné celé číslo väčšie ako jedna. Potom f je izometria.

V prípade, že zobrazenie *f* zachováva dve vzdialenosti s neceločíselným podielom a *X, Y* sú reálne normované vektorové priestory, pričom *Y* je ostro konvexný a *dimY* ≥ *2,* zostáva stále nezodpovedané, či v takomto prípade musí byť zobrazenie *f* už izometriou.

4. Záver

V tomto článku sme uviedli iba časť z množstva zaujímavých výsledkov, ktoré boli dosiahnuté v poslednom období. Predmetom ďalšieho skúmania môžu byť zobrazenia medzi reálnymi vektorovými priestormi, ktoré namiesto zachovávania jednej (napr. jednotkovej) alebo dvoch vzdialeností, zachovávajú tri navzájom rôzne vzdialenosti. Niekoľko ďalších námetov a otázok nájdeme aj v prácach Th. M. Rassiasa [6] - [8]. Spoločnou črtou týchto prác je, že uvedením množstva otvorených problémov sa dá zvýšiť záujem čitateľa o danú oblasť.

Literatúra

[1] Beckman, F.S. - Quarles, D.A.: *On isometries of Euclidean spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 810-815.

[2] Benz, W. : *Geometrische Transformationen,* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zurich, 1992.

[3] Benz, W.: *Real Geometries,* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim-Leipzig-Wien-Zurich, 1994.

[4] Benz, W. - Berens, H.: *A contribution to a theorem of Ulam and Mazur,* Aequation Math. 34 (1987), 61-63.

[5] Billich, M.: *Transformations preserving unit distance,* Acta Fac. Paed.Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, no. 5 (2001), 11-15.

[6] Ciesielski, K. - Rassias, Th.M.: *On some properties of isometric mappings,* Facta Univ. Ser. Math. Inform. 7 (1992), 107-115.

[7] Rassias, Th. M.: *Properties of isometries and aproximate isometries,* in "Recent progres in inequalities" (ed. G.V. Milovanovic), 341-379, Math. Appl. 430, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.

[8] Rassias, Th. M. - Šemrl, P.: *On the Mazur-Ulam theorem and the Aleksandrov problem for unit distance preserving mappings,* . Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 919-925.

[9] Rassias, Th. M. - Xiang, S.: *On mappings with conservative distances and the Mazur-Ulam theorem,* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. 11 (2000), 1-8.