NÁROČNEJŠIE URČOVACIE ÚLOHY V PRÍPRAVE UČITEĽOV MATEMATIKY ZÁKLADNÝCH ŠKÔL

Dušan Jedinák

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, SR
e-mail: djedinak@truni.sk

Abstract: Selected examples can show the inspiring impulses for mathematical thinking may be offered already in the last grades of elementary school or in secondary school.
Key words: teaching of mathematics, elementary and secondary schools.

1. Úvod

Jednou zo zmysluplných didaktických úvah je aj zamyslenie sa nad určovacími úlohami školskej matematiky, ich postavením a významom v učive základnej alebo strednej školy. Nad touto problematikou treba uvažovať už v príprave budúcich učiteľov matematiky.

2. Určovacie úlohy školskej matematiky

Matematická určovacia úloha je požiadavka, aby sme z danej množiny $\boldsymbol{U}$ určili všetky také prvky (obor pravdivosti $\boldsymbol{P}$), ktorými po dosadení do danej výrokovej formy $\boldsymbol{V}$ dostaneme pravdivý výrok**.** Každú určovaciu úlohu školskej matematiky chápeme ako vyhľadanie (určenie, zostrojenie) nejakej podmnožiny $\boldsymbol{P}$ z nejakej danej neprázdnej množiny $\boldsymbol{U}$ matematických objektov, ktorá má určitú štruktúru (je vybavená určitými vlastnosťami, reláciami a operáciami). Pomocou pojmov patriacich do tejto štruktúry sú vyjadrené požadované vlastnosti podmnožiny $\boldsymbol{P} = \{x \in \boldsymbol{U};\ V(x)\}$, kde V je určitá výroková forma (požadovaná vlastnosť) alebo konjunkcia príslušných výrokových foriem. Cieľom riešenia určovacej úlohy je určiť množinu $\boldsymbol{P}$ vymenovaním (vyčítaním) alebo operáciami s už známymi podmnožinami množiny $\boldsymbol{U}$, alebo špecifickými modifikáciami týchto spôsobov pre prvky a podmnožiny množiny $\boldsymbol{U}$. V práci [2] autori uvádzajú niektoré osvedčené metódy riešenia určovacích úloh:

priame metódy (skúška so všetkými prvkami konečnej množiny, či majú požadovanú vlastnosť; experimentálne skúšanie prvkov nekonečnej alebo príliš početnej množiny či majú požadovanú vlastnosť; dôsledková metóda – rozbor a skúška; ekvivalenčná metóda – uplatňujú sa matematické vety v tvare ekvivalencie),

nepriame metódy (prechod k doplnkovej úlohe; prechod k čiastočným úlohám; transformácia úlohy, t.j. prechod k úlohám v inej množine, napr. substitúcia alebo grafické metódy a pod.).

Školská matematika má vypracované mnohé algoritmy pre veľké triedy úloh (napr. pre určenie najmenšieho spoločného násobku dvoch prirodzených čísiel, riešenie kvadratických rovníc a pod.). Ak nie je známy algoritmus riešiteľ skúma vzťahy medzi danými prvkami a odhaľuje riešiaci postup.

Ponúkam sedem podnetných zadaní určovacích školských úloh aj s ich riešeniami, ktoré používam v didaktickej príprave budúcich učiteľov matematiky pre 5. – 9. ročník ZŠ.

3. Nielen radosť z experimentovania

Úloha: Pre ktoré $n \in \mathrm{N}$ je $1! + 2! + 3! + 4! + ... + n! = p^2$ kde p je prirodzené číslo.

Riešenie: Kto skúsi postupne dosadzovať, vybadá:

$$1! = 1 = 1^2$$
$$1! + 2! = 3$$
$$1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$$
$$1! + 2! + 3! + 4! = 33$$
$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153$$
$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! = 873$$

Zadaniu vyhovujú zatiaľ iba $n = 1$, $n = 3$.
Zdá sa, že od $n = 4$ je posledná číslica tých jednotlivých súčtov vždy 3. Prečo? Lebo pre $k \geq 5$ už všetky $k!$ majú poslednú číslicu vždy nula (je tam vždy súčin 2.5). Ale druhá mocnina žiadneho prirodzeného čísla nikdy nekončí číslicou 3 (pretože $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$ a potom ďalšie mocniny sa už v poslednej číslici opakujú). Danej úlohe vyhovujú len čísla 1 a 3.
Experimentovanie často ponúkne hypotézu, ktorú keď dokážeme, riešenie úlohy je zaručené.

4. Hľadajte a nájdete ...

Úloha: Aký je mocniteľ čísla 7, ak rozložíme číslo 10000! (desaťtisíc faktoriál) na súčin prvočíselných činiteľov?

Riešenie:
10000! = 1 . 2 . 3 .... 9999 . 10 000

exponent nad 7 je taký, aký je počet sedmičiek v tom súčine:

1.2.3. ... 7 ... 14(=2.7) ... 21(=3.7) ....49(=7.7) ... 98(=2.7.7) .... 343(=7.7.7) ...

... 686(=2.7.7.7) ....2401(=7.7.7.7) ... 4802(=2.7.7.7.7) 9999.1000

Koľko krát je v tom súčine číslo 7?

za každý násobok jednej 7:	10 000 : 7 = 1 428
za každý násobok 49 (kde je o jednu 7 viac):	10 000 : 49 = 204
za každý násobok 343 (kde je ďalšia 7 naviac):	10 000 : 343 = 29
za každý násobok 2401 (kde je zase ďalšia 7 naviac):	10 000 : 2401 = 4
teda spolu	1665

V spomínanom súčine je číslo 7^{1665}, teda mocniteľ čísla 7 je 1665.

5. Deliteľnosť ciferným súčtom

Úloha: Určte všetky kladné dvojciferné čísla, ktoré po vydelení svojím ciferným súčtom dávajú tretinu svojho ciferného súčtu.

Riešenie:
A. Nech sú cifry hľadaného čísla x, y. Teda hľadané číslo je $x.10 + y$.

Zadanie úlohy znamená, že $\dfrac{10.x+y}{x+y}=\dfrac{x+y}{3}$. Po úprave $10x+y=\dfrac{(x+y)^2}{3}$.

Pretože $(10x + y)$ je kladné celé číslo, tak je zrejmé, že číslo $(x + y)$ musí byť deliteľné tromi. Pre dvojciferné čísla to znamená, že $(x + y) \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, pretože ciferný súčet dvojciferného čísla je najviac 18.

Vyplníme tabuľku

$x + y$	$\dfrac{(x+y)^2}{3}=10x+y$	posúdenie ciferného súčtu čísla (10x +y)
3	3	nie je dvojciferné číslo
6	12	$1 + 2 \neq 6$
9	27	$2 + 7 = 9$ vyhovuje
12	48	$4 + 8 = 12$ vyhovuje
15	75	$7 + 5 \neq 15$
18	108	nie je dvojciferné číslo

Úlohe vyhovujú čísla 27 a 48.

B. (mierna obmena predchádzajúceho postupu)

Označme c hľadané dvojciferné číslo, s jeho ciferný súčet.

Potom má platiť $\dfrac{c}{s}=\dfrac{s}{3}$, c aj s sú kladné celé čísla.

$3.c = s^2$, teda 3 delí s, ale pretože s je ciferný súčet čísla, tak 3 delí aj to číslo, t.j. 3 delí c.

Potom $\dfrac{c}{s}=\dfrac{s}{3}=v$, kde $v \in Z^+$.

Vyplníme tabuľku, aby $s \in \{ 3, 6, ..., 18 \}$

v	$s = 3v$	$c = v.s$	Preverenie vlastností čísla c
1	3	3	c nie je dvojciferné
2	6	12	$1 + 2 \neq 6$ nevyhovuje ciferný súčet
3	9	27	$2 + 7 = 9$ vyhovuje
4	12	48	$4 + 8 = 12$ vyhovuje
5	15	75	$7 + 5 \neq 15$ nevyhovuje ciferný súčet
6	18	108	c nie je dvojciferné

Úlohe vyhovujú čísla 27 a 48.

C. Postupné vypísanie všetkých možností a overenie požadovanej vlastnosti nás rovnako privedie k tmu, že úlohe vyhovujú čísla 27 a 48.

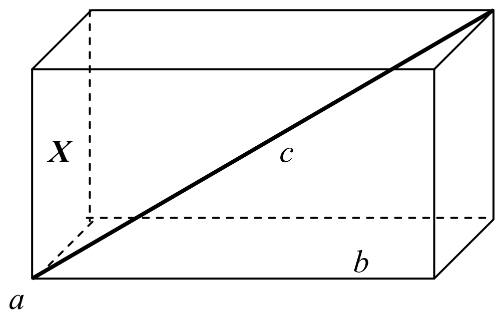
6. Nemusíš poznať, čo od teba nechcú

Úloha: Akú najdlhšiu tyč možno umiestniť do kufru tvaru kvádra, ak poznáme povrch kufru P a súčet d dĺžok troch základných rozmerov kufru.

Riešenie: Ak si označíme kváder a jeho rozmery, platí

$$d = a + b + c, \qquad P = 2ab + 2bc + 2ac,$$

t.j. máme dva údaje (rovnice) a tri neznáme a, b, c.



Dĺžka uhlopriečky kvádra je $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, to je aj dĺžka najdlhšej tyče v kufri. Hľadajme výraz $a^2 + b^2 + c^2$ vyjadrený len pomocou d a P.

Pretože $d = a + b + c$, tak $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$,

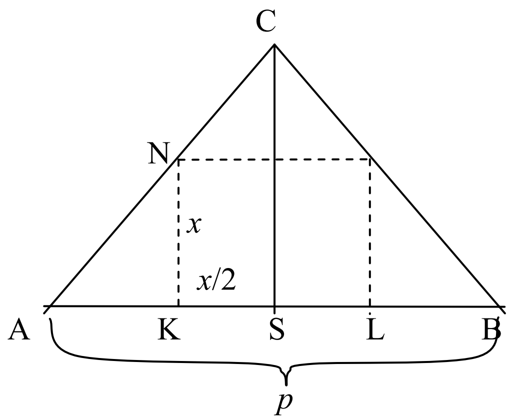
teda $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 - 2ab + 2bc + 2ac = d^2 - P$, potom $x = \sqrt{d^2 - P}$.

Nepoznáme rozmery kvádra a, b, c, ale aj tak poznáme dĺžku uhlopriečky v kvádri.

7. Podobnosť aj pri vpisovaní

Úloha: Vypočítajte veľkosť strany štvorca vpísaného do rovnostranného trojuholníka ABC, ktorý má dĺžku strany p cm.

Riešenie: Znázornime si situáciu na obrázku.



Vpísaný štvorec má veľkosť svojej strany x cm.
Ak nepoužijeme zrejmú skutočnosť, že v pravouhlom trojuholníku AKN platí

$$tg60^0 = \frac{x}{\frac{p}{2} - \frac{x}{2}},$$

tak môžeme využiť podobnosť trojuholníkov:
Δ AKN a Δ ASC sú podobné (podľa vety uu), teda pre pomer ich strán platí

$$\frac{AK}{KN} = \frac{AS}{SC} \qquad (1)$$

Ak vyjadríme veľkosť výšky rovnostranného trojuholníka ABC

$$|SC| = \sqrt{p^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3p^2}{4}} = \frac{p}{2}.\sqrt{3},$$

tak dosadením veľkostí strán do (1) dostaneme

$$\frac{\frac{p}{2} - \frac{x}{2}}{x} = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2} \cdot \sqrt{3}},$$

$$\text{upravíme } \frac{(p-x)}{2x} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ t.j. } p\sqrt{3} - x\sqrt{3} = 2x$$

$$\text{a dostaneme } x = \frac{p\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2p\sqrt{3} - 3p}{4-3}$$

$$x = p.\left(2\sqrt{3} - 3\right) \text{ cm.}$$

8. Parita a prvočísla

Úloha: Určte všetky prirodzené čísla x, pre ktoré sú obe čísla $(x\text{-}3)^2 - 2$, $(x\text{-}7)^2 + 1$ prvočísla.

Riešenie: Ak do daných číselných výrazov postupne dosadíme za x prirodzené čísla, vybadáme, že nemajú rovnakú paritu (párnosť – nepárnosť). To je preto, že čísla $(x\text{-}3)$ a $(x\text{-}7)$ majú pre každé $x \in$ N rovnakú paritu (pretože 3, 7 sú nepárne), aj $(x\text{-}3)^2$ a $(x\text{-}7)^2$ majú rovnakú paritu, ale $(x\text{-}3)^2 - 2$, $(x\text{-}7)^2 + 1$ majú rôznu paritu. Pretože len 2 je prvočíslo a párne, tak musí byť buď $(x\text{-}3)^2 - 2 = 2$ alebo $(x\text{-}7)^2 + 1 = 2$. Teda $(x\text{-}3)^2 = 4$ t.j. $x = 1$ alebo $x = 5$ alebo $(x\text{-}7)^2 = 1$ t.j. $x = 6$ alebo $x = 8$. Potom

ak $x = 1$ tak $(x - 3)^2 - 2 = \mathbf{2}$ a $(x - 7)^2 + 1 = \mathbf{37}$**;**

ak $x = 5$ tak $(x - 3)^2 - 2 = \mathbf{2}$ a $(x - 7)^2 + 1 = \mathbf{5}$**;**

ak $x = 6$ tak $(x - 7)^2 + 1 = \mathbf{2}$ a $(x - 3)^2 - 2 = \mathbf{7}$**;**

ak $x = 8$ tak $(x - 7)^2 + 1 = \mathbf{2}$ a $(x - 3)^2 - 2 = \mathbf{23}$. Hľadanými číslami sú: 1, 5, 6, 8.

9. Najmenšie a prirodzené

Úloha: Určte trojicu najmenších po sebe idúcich prirodzených čísiel, ktorých súčet je druhou a zároveň aj treťou mocninou nejakých prirodzených čísiel.

Riešenie: Označme si: $p + (p + 1) + (p + 2) = 3p + 3 = 3(p+1)$, kde $p \in$ N. Nech existujú prirodzené čísla m, n tak, aby $3.(p + 1) = m^2 = n^3$. [Už teraz je „vidieť“, že zadaniu úlohy vyhovuje $\left(3^3\right)^2 = \left(3^2\right)^3$]. Potom, ale existujú aj prirodzené čísla x, y tak, že platí $3.(p+1) = 3^2. x^2 = 3^3. y^3$ (prvočíselný rozklad prirodzených čísiel). Z toho vyplýva, že $p + 1 = 3.x^2 = 3^2. y^3$ a teda aj $x^2 = 3.y^3$; tomuto vyhovujú najmenšie prirodzené $y = 3$ a $x = 9$. Potom $p = 242$. Najmenšia trojica prirodzených čísiel s požadovanými vlastnosťami je $242 + 243 + 244 = 729 = 27^2 = 9^3$.

10. Záver

Český didaktik Jan Vyšín ukázal [3], že v podstate netreba v školskej matematike zvlášť rozlišovať medzi určovacími, dôkazovými a existenčnými úlohami, lebo dôkazové i existenčné úlohy vznikajú z úloh určovacích tak, že zadáme buď čiastočne alebo úplne aj obor pravdivosti danej výrokovej formy.

Literatúra

[1] HECHT, T. - SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh*. Bratislava: SPN, 1992.

[2] ODVÁRKO, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh.* Praha: SPN, 1990.

[3] VYŠÍN, J.: *Metodika řešení matematických úloh*. Praha: SPN, 1962, 1972.